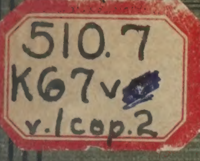


KLEIN UND SCHIMMACK

DER MATHEMATISCHE UNTERRICHT

AN DEN HÖHEREN SCHULEN

TEIL 1



MATHEMATISCHE VORLESUNGEN AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN: I 1

F. KLEIN

VORTRÄGE ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

AN DEN HÖHEREN SCHULEN

BEARBEITET VON

RUD. SCHIMMACK

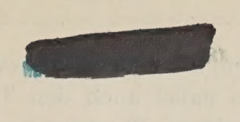
TEIL 1

VON DER ORGANISATION DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS

MIT ACHT ZUM TEIL FARBIGEN TEXTFIGUREN

BG

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907



Vorrede.

Die große pädagogische Bewegung, welche die Öffentlichkeit von Jahr zu Jahr mehr beschäftigt, verlangt von den Vertretern jedes einzelnen Gebietes, daß sie Inhalt und Methode des ihnen anvertrauten Unterrichtsbereichs nach allen Richtungen erneuter Prüfung unterwerfen und an den verschiedenen Schulen so bemessen, wie es den allgemeinen Aufgaben der einzelnen Anstalt und dem heutigen Stande der Wissenschaft am besten entspricht. Auf den ersten Seiten der folgenden Darstellung wird berichtet, wie auch die Mathematiker, im Bunde mit den Naturwissenschaftlern, zuerst zögernd dann immer lebhafter in diese Bewegung hineingezogen worden sind. Und es ist charakteristisch, daß die Vertreter der höheren Schulen dabei mit Vertretern der Hochschulen Hand in Hand gehen. Ich halte dies für besonders erfreulich, weil ich überzeugt bin, daß beide einander vielerlei Wichtiges zu sagen haben. Jedenfalls hat mein eigener Hochschulunterricht infolge dieser Wechselwirkung vielfach neue Anregungen in sich aufgenommen. Nachdem ich meine Stellungnahme vor der Öffentlichkeit seither nur in kürzeren Vorträgen und Einzelaufsätzen dargelegt habe, glaube ich jetzt den weiteren Schritt tun zu sollen, meine Auffassungen und Absichten und allerlei Ansätze, die ich in meinen Vorlesungen gab, in zusammenhängender Darstellung dem Publikum zu unterbreiten.

Für den vorliegenden ersten Teil, der von der Organisation des mathematischen Unterrichts an den verschiedenen Arten von Lehranstalten, insbesondere an den höheren Schulen, handelt, kommt insbesondere die Vorlesung in Betracht, die ich unter dem Titel: „Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen“ im Winter 1904—05 gehalten habe. Aber diese Vorlesung war weit davon entfernt, druckfertig zu sein. Darstellung und Einzelheiten waren vom Augenblick gegeben; es fehlte nicht nur die abgerundete Form, sondern auch die gleichförmige Durcharbeitung des Stoffes. Hier ist es, wo mein werter Mitarbeiter, Herr Rudolf Schimmack (damals mein Assistent, jetzt Probekandidat am hiesigen Gymnasium) mit ebensoviel Geschick als eingehendem Fleiß mir zu Hilfe gekommen ist. Ich habe ihm hierfür den lebhaftesten Dank zu sagen, und zweifle nicht, daß ihm auch seitens des lesenden Publikums alle Anerkennung zuteil werden wird. Hat er doch sozusagen ein Kunststück fertig gebracht: er hat nicht nur auf Grund der genannten Vorlesungen und der Besprechungen, die wir in der Folge hatten,

einen zusammenhängenden, die neueste Literatur mit berücksichtigenden Text hergestellt, sondern dabei auch den Ton so getroffen, als wenn es sich um die unmittelbare Wiedergabe einer von mir gehaltenen Vorlesung handelte!

Freilich dürfte unsere Darstellung im einzelnen mancher Nachsicht bedürfen. Es ist nicht nur fast unmöglich, sich überall die erforderlichen Nachweise zu verschaffen, sondern es handelt sich auch um Dinge, die im lebhaftesten Fluß befindlich sind. So werden im folgenden zweifellos mancherlei Einzelheiten ungenau sein; auch ist die Darstellung hin und wieder durch die allerneueste Entwickelung bereits überholt. Wir bitten, alle Unvollkommenheiten, die in dieser Hinsicht vorliegen sollten, freundlichst entschuldigen zu wollen, und werden für Berichtigungen, die man uns mitteilen mag, aufrichtig dankbar sein.

Geplant ist nun des weiteren die Herausgabe noch zweier Teile, in denen ausgewählte Fragen einerseits der Arithmetik, andererseits der Geometrie in sinngemäßer Weise besprochen werden sollen, nämlich so, daß der Lehrer eine lebendige Anschauung von der Entstehung und der Bedeutung der für ihn in erster Linie in Betracht kommenden Kapitel der heutigen Mathematik erhält. Ich habe mancherlei Ansätze zu der hier geplanten Darstellung seit Jahren in meinen Vorlesungen gegeben. Aber wirklich fertiggestellt ist im Augenblicke noch nichts, und es bleibt mir nur der Wunsch auszusprechen, daß günstige Umstände Herrn Schimmack und mir gestatten mögen, das Ganze in der geplanten Weise in nicht zu ferner Zeit wirklich zu Ende zu bringen.

Diese „Vorträge über den mathematischen Unterricht“ erscheinen, wie im Titelkopf bezeichnet, zugleich als erster Band einer Serie des Titels „Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen“. Es soll eine größere Zahl verschiedenartigster Vorlesungen unter dem genannten Titel zusammengefaßt dem Publikum vorgelegt werden. Ich habe mich dem Plan zu einer solchen Sammlung, der von meinem Kollegen *H. Minkowski* ausging, um so lieber angeschlossen, als ich meine eigene Lehrtätigkeit an der Göttinger Universität nur im Rahmen der anderweitigen Bestrebungen, die von meinen Kollegen vertreten werden, gewürdigt wissen möchte. Indem wir verschiedene Ansätze und Methoden verfolgen, wünschen wir unseren Zuhörern nach Möglichkeit einen Blick zu eröffnen auf die umfassende Bedeutung und die immer mehr sich dehnenden Aufgaben der als eine Einheit erfaßten gesamten mathematischen Wissenschaft.

Göttingen, im April 1907.

Klein.

Sonstige Vorbemerkungen.

Vorweg sei darauf aufmerksam gemacht, daß im Anhang drei Veröffentlichungen wiederabgedruckt sind, auf die im vorliegenden Buche häufig Bezug genommen wird und die in engem Zusammenhang mit seinem Inhalt stehen: es sind zwei Aufsätze von *F. Klein* und der „Meraner Lehrplan", soweit er speziell die Mathematik betrifft. Zugleich ist hiermit die Zusammenstellung der einschlägigen Publikationen Kleins, wie sie in den Ferienkurssammelbänden „*Klein-Riecke* 1900" und „*Klein-Riecke* 1904" begonnen war, wieder bis zur Gegenwart fortgesetzt.

Betreffs der Verweise soll folgendes bemerkt sein:

Eckige Klammern [ ] bezeichnen durchweg Verweise auf Stellen innerhalb dieses Buches.

Zitate

1) auf Bücher sind nach dem Schema gegeben: Autor, Titel, eventuell Auflage, Verlagsort (Verlag) Jahreszahl;
2) auf Zeitschriften: Name der Zeitschrift, Verlagsort (Verlag) **Band** (Jahreszahl);
3) auf Schulprogramme, nach den alljährlich erscheinenden Verzeichnissen der Zentralstelle für den Programmaustausch, Leipzig (Teubner): Jahreszahl, Nummer (Anstalt).

Die in diesen Vorträgen angegebene Literatur macht keineswegs den Anspruch der Vollständigkeit. Eine fortlaufende Übersicht der alljährlich sehr zahlreichen Publikationen über das mathematische Unterrichtswesen an den höheren Schulen liefern die „Jahresberichte über das höhere Schulwesen", herausgegeben von *C. Rethwisch*, Berlin (Weidmann), seit 1886. Dort referieren im Abschnitt XII *A. Thaer* über reine, *K. Weise* über angewandte Mathematik. Zur Orientierung über die ausländischen Verhältnisse ist besonders die französische Zeitschrift zu empfehlen: „L'Enseignement mathématique, Revue internationale", geleitet von *C. A. Laisant* und *H. Fehr*, Paris (Gauthier-Villars), seit 1899.

Schimmack.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung. 1—9

Notwendigkeit dieser Vorträge 1
Die neuere Reformbewegung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Die Breslauer Kommission 2
Die verschiedenen Schularten. 7

Erster Abschnitt.

Die Volksschulen. 10—18

Allgemeines 10
Speziell der mathematische Unterricht 11
Lehrerausbildung. Universitätsfrage 13
Fortbildungsschulen. Volkshochschulkurse 16

Zweiter Abschnitt.

Die sechs unteren Klassen der höheren Knabenschulen. 19—43

Die verschiedenen Arten von Anstalten 19
Die Lehrpläne von 1901 20
Lehrmethoden. Lehrbücher 24
Stellung der Lehrbücher zum Funktionsbegriff. 26
Etwas von der Lehrerausbildung 28
Kritik des Lehrplans: unser Hauptgesichtspunkt 29
Der propädeutische Geometriekurs 30
Vom Rechenunterricht. Die drei Stunden in den Gymnasialtertien . . 33
Funktionsbegriff. Graphische Darstellungen 34
Reformvorschläge 37
Verhältnisse in Frankreich. 40
Verhältnisse in den Vereinigten Staaten Nordamerikas 42

Dritter Abschnitt.

Die Mädchenschulen und die mittleren Fachschulen. 44—66

Die Mädchenschulen. 44—52

Vorbemerkung 44
Die Mathematik an den Mädchenschulen 45
Lehrerinnenausbildung. Die Oberlehrerin 47
Mädchengymnasien. Lyzeen und Oberlyzeen 49

Seite

Die mittleren Fachschulen. 52—66

Vorbemerkung 52
Seefahrtschulen 53
Ausbildung der Lehrer für Fachschulen 55
Ausbildung der Landmesser 56
Technika: Allgemeine Verhältnisse 58
Mathematik und Physik an den technischen Mittelschulen 60
Mathematische Lehrbücher 63
Ausbildung der Mathematiklehrer für technische Mittelschulen 65

Rückblick 66

Vierter Abschnitt.

Vom historischen Entwicklungsgang des mathematischen Unterrichts unserer höheren Schulen. 67—99

Vorbemerkung über die historische Entwicklung der mathematischen Wissenschaft 67
Übergang zur Geschichte des Unterrichtswesens. Literatur 70

Das Unterrichtswesen im humanistisch-reformatorischen 16. Jahrhundert. 71—73

Allgemeines. Die Organisation 71
Insbesondere der mathematische Unterricht dieser Zeit 72

Die Weiterentwicklung des Unterrichtswesens im realistisch-utilitarischen 17. und 18. Jahrhundert. 73—78

Allgemeine Zeitlage 73
Organisation des Unterrichtswesens 74
Insbesondere der mathematische Unterricht 75

Einheitliche staatliche Organisation speziell der Gymnasien in der Zeit der formalen Bildung. (Die beiden ersten Drittel des 19. Jahrhunderts.) 78—84

Änderung der Zeitlage 78
Organisatorische Neuerungen im Unterrichtswesen 80
Der mathematische Unterricht an den Gymnasien 82

Ausbildung des höheren Schulwesens zu gleichwertigen parallellaufenden Anstaltsarten. (Letztes Drittel des 19. Jahrhunderts: zunächst bis 1882.) 84—92

Entwicklung der Realschulen 85
Der Schulkampf in den siebziger Jahren 87
Stellung zur Hochschule. Pädagogische Bestrebungen 89
Die Mathematik in den Lehrplänen von 1882 91

Fortsetzung. (Letztes Drittel des 19. Jahrhunderts: von 1882 bis 1901.) 92—99

Die achtziger Jahre. Die Lehrpläne von 1892 92
Neue Bestrebungen in den neunziger Jahren 94
Prinzip der Schulreform von 1900 96

Seite

Fünfter Abschnitt.

Die drei Oberklassen der höheren Schulen nach den Lehrplänen von 1901. 100—126

Stundenplan in Mathematik und Naturwissenschaften 100

Die Lehrpläne in der Arithmetik. 101—109

Lehrpensum des Gymnasiums und der Realanstalten 101
Erläuternde und kritische Bemerkungen: Gleichungen, Kombinatorik. 102
Fortsetzung: Maxima und Minima. Einiges über *Schellbach* 105

Exkurs über die Frage der Infinitesimalrechnung im Schullehrstoff. 109—121

Gefahr der Überbürdung. Bedenken der Unklarheit 109
„Elementarmathematik". Gefahr des Formalismus. „Fachbildung" . 110
Stellung zu den Hochschulvorlesungen 113
Der Infinitesimalgedanke ohnehin auf der Schule. Historisches . . . 115
Organische Einarbeitung. Neuere Schulbücher 117
Stellung *Holzmüllers*. Reformbewegung im Ausland 118

Die Lehrpläne in der Geometrie. 121—126

Lehrpensum des Gymnasiums und der Realanstalten 121
Erläuternde und kritische Bemerkungen: Konstruktionsaufgaben; Isolierung der Gebiete 122
Fortsetzung: neuere Geometrie; darstellende Geometrie; mathematisches Zeichnen 124

Sechster Abschnitt.

Reformvorschläge für die Oberklassen der höheren Schulen. 127—157

(Nebst Erörterung über die allgemeinen Fragen der Schulreform.)

Vorbemerkung 127
Reformvorschläge betreffs Mathematik auf dem Gymnasium. 128
Hinblick auf die späteren Berufe der Schüler 132
Etwas vom naturwissenschaftlichen Unterricht 136
Reformvorschläge betreffs Mathematik und Naturwissenschaften an den Realanstalten 140
Ein höheres mathematisches Lehrziel für die Oberrealschule 143
Vom faktischen Übergewicht der Gymnasien 148
Verschiedene Wege zur Lösung der Gymnasialfrage 152
Vom mathematischen Unterricht an den Reformschulen 155

Siebenter Abschnitt.

Die Hochschulen. 158—189

Vorbemerkung 158

Die Universitäten. 159—176

Geschichtliches von der Göttinger Universität: zunächst im 18. Jahrhundert 159

Seite
Fortsetzung: Die beiden ersten Drittel des 19. Jahrhunderts 160
Fortsetzung: Das letzte Drittel des 19. Jahrhunderts, Überblick . . . 164
Fortsetzung: Einfluß der Vorgänge von 1870/71 166
Fortsetzung: Entwicklung seit 1892 169
Kurze Angaben über die anderen Universitäten 173
Rückblick und Ausblick 175

Die technischen Hochschulen. 176—189

Das französische Vorbild 177
Karlsruhe und Zürich 180
Neue Wendung seit etwa 1890 181
Die Münchener Beschlüsse des Ingenieurvereins von 1904. Reformgedanken 185

Schlußwort. 189—190

Anhang.

Wiederabdruck zweier Aufsätze von F. Klein und des Meraner Lehrplans. 191—236

A. *F. Klein:* Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen (1904) 193
B. Der Meraner Lehrplan für Mathematik (1905) 208
C. *F. Klein:* Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts (1905) 221

Einleitung.

Meine Herren, diese Vorträge über den mathematischen Unterricht wollen an ihrem Teil zur Ausfüllung einer Lücke beitragen, die bisher nur allzulange in unserem ausgedehnten Göttinger Universitätsbetriebe geklafft hat. Alljährlich kommt eine große Schar junger Leute von den höheren Lehranstalten zu uns an die Hochschule, alljährlich entsendet die alma mater eine beträchtliche Anzahl ihrer Zöglinge in den Lehrberuf an die verschiedenartigsten Unterrichtsanstalten. Aber so eng hiernach die wechselseitigen Beziehungen zwischen Universität und höheren Lehranstalten sein sollten, so groß ist, wenigstens was den mathematischen Unterricht angeht, in Wirklichkeit die Diskontinuität, die sie innerlich trennt.

Man hat die Ausbildung unserer Kandidaten des höheren Lehramts wohl das „System des doppelten Vergessens" genannt. Und wer will sagen: mit Unrecht? Der junge Mulus, der sich in die Freiheit des ersten Semesters stürzt, schüttelt mit dem Schulzwang zugleich auch die Erinnerung an jene „niedere" Mathematik ab, mit der man ihn bisher traktiert hat, um fortan ganz in den „höheren" Regionen dieser Wissenschaft zu leben. Der Lehramtskandidat, der die Klippen der Examina glücklich umschifft hat, legt alsbald die hohe Mathematik, die er dazu erlernt hat, beiseite und sieht sich aufgefordert, jetzt vielmehr über die Schulmathematik nachzudenken, wie man diesen Lehrstoff auf rationelle Weise an der Schule unterrichten mag. Liegt in dem System, daß die Mathematik der Hochschule und die der Schule keine rechte Beziehung haben, nicht etwas Widersinniges?

Von solchen Überlegungen aus werden wir zu der Aufgabe geführt, Schul- und Hochschulmathematik in nähere Verbindung zu bringen. Und so hatte es großes Interesse für mich, den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen einmal zum Gegenstand ausgedehnterer Vorträge zu nehmen. Natürlich will ich damit nicht im geringsten der Einrichtung von Seminarjahr und Probejahr vorgreifen, wo Sie Ihre eigentliche praktische Ausbildung erhalten

sollen; aber was Sie hier erfahren, wird geeignet sein, Ihnen für jene Zeit in wünschenswerter Weise den Boden zu ebnen.

Man hört freilich wohl die Ansicht aussprechen, daß den Universitätslehrer der Mathematik die Sorge für das Pädagogische überhaupt nichts angehe; sondern daß es eben Aufgabe der allgemeinen pädagogischen Vorlesungen sei, auch auf den mathematischen Unterricht Bedacht zu nehmen. Indessen bemerken Sie, die Dozenten für Pädagogik sind in der Regel philologisch oder philosophisch, aber nicht eigentlich mathematisch vorgebildet und können daher nach dem gegenwärtigen Stande der Dinge unmöglich mit dieser Pflicht betraut werden. Bekennt doch z. B. der hochverdiente Pädagoge *F. Paulsen* von sich, daß er auf dem Gebiete der mathematischen Unterrichtsfragen nicht Fachmann genug sei, um in seinen Schriften die Verhältnisse des mathematischen Unterrichts mehr als nur eben zu streifen.

Zur Überbrückung der besagten Diskontinuität ist bisher, obgleich wir heute schon mitten in einer großen Reformbewegung stehen, noch viel zu wenig getan. Natürlich ist ein beiderseitiges Entgegenkommen notwendig. Vor allem werden wir, um zu sehen, ob die Organisationen hier und dort gut aufeinander abgestimmt sind, diese selbst genauer kennen müssen. Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den verschiedenen Lehranstalten muß überhaupt in hohem Maße unser Interesse gefangen nehmen, und es erscheint bedauerlich, daß sie noch nicht zum Gegenstand einer eingehenderen Darstellung gemacht worden ist. Ich benutze daher gern die Gelegenheit, mich darüber in einem ersten Teil der Vorträge zu verbreiten. Hierbei müssen wir ohne Zweifel einen Ausblick auf alle Schularten nehmen, an denen mathematischer Unterricht besteht, und auch auf das Schulwesen im Auslande, obzwar immer die Betrachtung der Verhältnisse an den preußischen höheren Lehranstalten den Mittelpunkt bilden soll. Im zweiten Teil werde ich hernach ausführlicher von den einzelnen Unterrichtsgebieten der Schulmathematik sprechen und sie von höherem Standort zu beleuchten suchen. Im ganzen bitte ich Sie, mir wie auf einem Spaziergange zu folgen. Indem ich Sie da und dort auf lohnende Aussichtspunkte führe, werden Sie über das Gelände, das Sie kennen lernen wollen, eine Orientierung gewinnen, ohne daß wir systematische und genaue Vermessungen anstellen. —

Meine Herren, ich sagte eben, wir stehen heute schon inmitten einer durchgreifenden Reformbewegung. Lassen Sie mich das vorweg mit wenigen Worten erklären.

Das Ereignis, an welches die moderne Entwicklung in erster Linie anknüpft, ist die sog. „zweite Schulkonferenz", die vom 6.

bis 8. Juni 1900 in Berlin tagte*). Dort wurde im Gegensatze zu der früheren einseitigen Bevorzugung des humanistischen Gymnasiums die Gleichwertigkeit der drei neunklassigen höheren Lehranstalten als Prinzip aufgestellt, und im Zusammenhang damit die Tendenz gutgeheißen, daß jede dieser drei Anstalten ihr spezifisches Lehrziel ausbilden müsse, Grundsätze, die alsdann durch den kaiserlichen Erlaß vom 26. November 1900 ihre Sanktion erhielten.

Ich habe damals im Anschluß an jene Konferenz mehrfach betont, Mathematik und Naturwissenschaften müßten die günstige, vielleicht so nicht wiederkehrende Gelegenheit wahrnehmen, sich ihre berechtigte Stellung zu verschaffen, um dann auch für die neueren, auf die Pflege der Anwendungen gerichteten Tendenzen Bahn zu gewinnen, und habe auf unsere in diesem Sinne verfaßte Göttinger Ferienkursschrift von 1900 „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen"**) hingewiesen. Aber die Philologen waren die einzigen, welche die Situation rasch erfaßten und zu nutzen verstanden. Nach Erlaß der neuen Lehrpläne von 1901 machten sich sowohl Alt- als auch Neusprachler mit Eifer daran, ihr spezifisches Ideal auszuarbeiten. Altes und Überlebtes wurde abgestoßen, Neues und Interessantes herangeholt, sodaß der Sprachunterricht damit in eine Periode moderner lebendiger Entwicklung eintrat.

Mathematik indessen und Naturwissenschaft rührten sich zunächst nicht. Die kleinen Änderungen, die der neue preußische Lehrplan von 1901 vorschrieb, nahm man natürlich auf; die großen neuen Richtlinien, die bei seiner Entstehung vorgezeichnet wurden und die auch in den methodischen Bemerkungen der Lehrpläne durchleuchten, schienen unbeachtet bleiben zu sollen. Auch mein Aufsatz von 1902 „Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen"⁰), der bald darauf durch einen interessanten Artikel des am hiesigen Gymnasium wirkenden Professor *E. Götting*⁰⁰) eine Ergänzung bekam, erzielte vorderhand keinen sonderlichen Erfolg. In diesem ganzen Verhalten der beteiligten Kreise lag eine mir unverständliche Resignation, als ob die Schulmathematik eine tote

*) Man vergleiche die amtliche Publikation: Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts 1900, Halle (Waisenhaus) 1902.

**) Mit dem Zusatz: Vorträge, gesammelt von *F. Klein* und *E. Riecke*, Leipzig (Teubner) 1900.

⁰) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig (Teubner), **11** (1902), Seite 128—141. Abgedruckt in dem weiter unten [Seite 5] zitierten Ferienkurs-Sammelband von 1904, unter dem Titel: Bemerkungen im Anschluß an die Schulkonferenz von 1900.

⁰⁰) Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **11** (1902), Seite 189—197. Ebenfalls abgedruckt in dem Ferienkurs-Sammelbande von 1904.

Disziplin sei, im Altertum geschaffen, im Mittelalter mehr und mehr abgeschliffen und in der Neuzeit zu einem Abschluß gelangt, und nun werde sie in starrer, unveränderlicher Form in alle Zukunft weiterexistieren. Zu solchen Ansichten müssen wir hier in prinzipiellen Gegensatz treten. Die Mathematik ist durchaus eine lebendige Wissenschaft, die fortwährend neue Probleme aufnimmt und verarbeitet, die Veraltetes wegwirft und sich so immer wieder und wieder verjüngt. Und das gilt nicht bloß von der hohen Wissenschaft, wo es ja selbstverständlich ist, sondern es soll auch entsprechend mit der Schulmathematik sein; auch sie muß sich immer erneut umbilden, nach Maßgabe der sich langsam verschiebenden allgemeinen Kulturinteressen und zudem natürlich im Rahmen der unserer Jugend gegebenen Fassungskraft.

Eine geänderte Sachlage wurde dadurch geschaffen, daß sich auch die Biologen, als die Vertreter derjenigen naturwissenschaftlichen Fächer, die an der Schule am meisten vernachlässigt sind, zu rühren begannen. Die Biologie, die Lehre von den Lebensfunktionen ist, wie Sie wissen, meine Herren, heutigentags von den oberen Klassen der preußischen höheren Lehranstalten verbannt. Dies ist nicht immer so gewesen. Bis in die siebziger Jahre hinein sind die biologischen Disziplinen wenigstens an den Realanstalten auf den Oberklassen unterrichtet worden, bis jener berühmt gewordene „Lippstädter Fall" dem ein Ende setzte. Ein Lehrer *Hermann Müller*, übrigens ein verdienter Naturforscher, hatte zu Lippstadt im biologischen Unterricht seinen Schülern die *Darwin*sche Theorie in einer der Öffentlichkeit unerlaubt scheinenden Weise vorgetragen. Um solchen Gefahren einfürallemal vorzubeugen, wurde von oben aus unter lebhafter Zustimmung des Abgeordnetenhauses die Biologie aus dem Lehrplan der oberen Klassen radikal ausgemerzt. Das war im Frühjahr 1879 gewesen.

Jetzt fanden sich auf der Hamburger Naturforscherversammlung 1901*) die Biologen und Freunde des biologischen Unterrichts zusammen, um der unterdrückten Disziplin wieder Ansehen und Geltung zu verschaffen. Es wurde eine Anzahl von Leitsätzen formuliert, die „Hamburger Thesen", die in präziser Fassung allen Wünschen betreffs des biologischen Unterrichts an der Schule Ausdruck gaben. Auf der Naturforscherversammlung zu Kassel 1903 wurden sodann die Hamburger Thesen zur Grundlage

*) Die „Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte" tagt alljährlich einmal im September und wechselt dabei jedesmal ihren Ort. Die Versammlung in Hamburg 1901 war die dreiundsiebzigste. Die offiziellen Berichte über die Sitzungen, Vorträge und Diskussionen erscheinen alljährlich als „Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte", Leipzig (Vogel).

einer Diskussion vor dem Plenum gemacht und wurden einstimmig angenommen. Dabei behielt man sich vor, die Gesamtheit der Fragen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts auf einer der nächsten Jahresversammlungen zum Gegenstand einer umfassenden Verhandlung zu nehmen. Und damit waren die Mathematiker und Physiker mit den Biologen zu gemeinsamer Aktion zusammengetreten, wodurch nun die ganze Bewegung eine viel größere Breite erhielt!

Die geplante Verhandlung fand gleich im folgenden Jahr auf der Naturforscherversammlung zu Breslau 1904 statt. Zur Einleitung der Debatte wurden, so war es vorgesehen, mehrere Referate gehalten: Professor *K. Fricke*-Bremen schilderte die allgemeine Lage des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen seit der Reform von 1900; unser Göttinger Professor *F. Merkel* gab spezielle Ausführungen über die biologischen Fächer, Medizinalrat *G. Leubuscher*-Meiningen über die hygienischen Interessen. Ich selbst hatte das Sonderreferat über den mathematischen und physikalischen Unterricht übernommen*). Dabei konnte ich mich auf die inzwischen erschienenen Hefte unseres neuen Göttinger Ferienkurs-Sammelbandes von 1904**) beziehen: einerseits meine Schrift „Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen“[0]), in der ich dafür eingetreten bin, den geometrisch gefaßten Funktionsbegriff in den Mittelpunkt des Unterrichts zu rücken — um einen neueren Ausdruck zu gebrauchen: das „funktionale Denken“ zu üben — und in Konsequenz davon die Anfänge der Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan aller höheren Schulen aufzunehmen; andrerseits die von *E. Riecke* gesammelten „Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik und Astronomie an den höheren Schulen“ mit Vorträgen von *O. Behrendsen, E. Bose, E. Riecke, K. Schwarzschild* und *J. Stark*[0]). Das dritte Heft des Sammelbandes: *F. Schilling*, „Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie“[0]) erschien erst einige Zeit danach.

Die Breslauer Debatte, meine Herren, war im großen und ganzen den vorgebrachten Ideen günstig und endigte damit, daß vom Plenum eine Kommission eingesetzt wurde mit dem Auftrage, die angeregten Fragen in ihrem Schoße weiterzuberaten und einer späteren Natur-

---

*) Meine Breslauer Rede ist im Anhang A des vorliegenden Buches abgedruckt.

**) Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen; Vorträge, gesammelt und herausgegeben von *F. Klein* und *E. Riecke*, Leipzig (Teubner) 1904.

[0]) Auch separat, Leipzig (Teubner) 1904.

forscherversammlung bestimmte abgeglichene Reformvorschläge vorzulegen. Seither ist diese „Breslauer Unterrichtskommission", deren Vorsitz Professor *A. Gutzmer* (damals in Jena, jetzt in Halle) führt und der auch ich die Ehre habe anzugehören, lebhaft tätig in schriftlichen Verhandlungen und mündlichen Gesamt- und Teilkonferenzen.

Ein erster Bericht*) über die Ergebnisse dieser Arbeiten ist der Meraner Naturforscherversammlung 1905 vorgelegt worden; ein zweiter**) für die Versammlung zu Stuttgart 1906 ist gefolgt, und noch sieht die Kommission ihre Tätigkeit nicht als beendigt an. Der Meraner Bericht enthält die Reformvorschläge der Breslauer Kommission für den Unterricht in der Mathematik, Physik und den biologischen Fächern an den drei höheren Lehranstalten. Insbesondere ist, was uns hier vornehmlich angeht, für den mathematischen Unterricht am Gymnasium ein recht eingehender Lehrplan zur Probe auf die praktische Durchführbarkeit der allgemeinen Vorschläge ausgearbeitet worden⁰). Die Stuttgarter Reformvorschläge legen weitergehend die Stellungnahme der Kommission zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an den sogenannten Reformschulen, den Mädchenschulen, den sechsklassigen Realschulen, sowie zu den wichtigen hygienischen Fragen dar.

Soviel zunächst über die schon in Gang gekommenen Arbeiten zur Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Lassen Sie mich nur noch einmal den allgemeinen Standpunkt der Breslauer Unterrichtskommission, der auch der meinige ist, hinsichtlich des mathematischen Unterrichts deutlich aussprechen. Es sollen unbeschadet des Wertes der Mathematik für die formale logische Bildung die Stärkung des Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens die zentralen Aufgaben sein; man betont damit eben die Seiten der mathematischen Geistestätigkeit, die im modernen Leben die wichtigste Rolle spielen. Was speziell die Infinitesimalrechnung angeht, so nimmt die Kommission, weil keine völlige Einigkeit erzielt werden konnte, eine weniger ausgesprochene Stellung ein als ich, wie wir das im folgenden bei passender Gelegenheit erörtern werden.

---

*) Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig (Teubner) 1905. Auch in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig (Teubner), **36** (1905), Seite 533—580; sowie in den Verhandlungen der Naturforscherversammlung **1905**, I, Seite 142—200.

) Desselben Titels mit dem Zusatz: II. Teil, Leipzig (Teubner) 1906. Wiederum auch in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **37 (1906), Seite 409—481; sowie in den Verhandlungen der Naturforscherversammlung **1906**, I, Seite 27—99.

⁰) Der Lehrplan ist im Anhang B des vorliegenden Buches abgedruckt.

Übrigens bemerke ich, um Mißverständnissen vorzubeugen, daß es im ganzen selbstredend persönliche Ansichten und Überzeugungen sind, die ich Ihnen hier vortragen will. Gleichwohl werde ich nicht verfehlen, häufiger auf die Arbeiten unserer Breslauer Unterrichtskommission zurückzukommen und auf den Meraner und den Stuttgarter Bericht zu verweisen. Dies um so mehr, als in der Kommission zahlreiche bewährte Schulmänner mitwirken, deren Erfahrungen ich viele Kenntnisse verdanke. So sehr ich mir betreffs der allgemeinen pädagogischen Gesichtspunkte sicher bin, in die Einzelheiten des Schulbetriebs werde ich natürlich von mir aus als Nichtschulmann keineswegs hineinreden.

Mit der im vorhergehenden kurz geschilderten Bewegung hängt auch der Plan, diese Vorträge zu halten, wie Sie sich denken können, aufs engste zusammen. Ich gehe nicht unvorbereitet daran. Seit längerer Zeit haben wir schon gearbeitet, auf unserem mathematischen Lesezimmer in einer Sonderabteilung die wichtigeren Bücher zusammenzubringen, die auf die Schulmathematik Bezug haben. Sie finden dort nicht nur die deutsche einschlägige Literatur reichlich vertreten, sondern auch die Schulverhältnisse des Auslandes sind weitgehend berücksichtigt; denn in den verschiedensten Ländern, in Frankreich, Italien, Österreich, England, in den Vereinigten Staaten, überall bestehen dieselben Unterrichtsaufgaben, und wir können von den Lösungen, die man so oder so versucht hat, nur lernen. Manche der in unserer Bibliothek aufgestellten Bücher werde ich Ihnen bei dieser oder jener Gelegenheit vorbringen und kurz besprechen, um Sie auf Stellen, die für uns Wichtigkeit haben, aufmerksam zu machen. Es sei aber gleich vorweg bemerkt, daß es sich dabei nirgends um eine erschöpfende Charakteristik handeln kann. Wollen Sie ein allseitiges Urteil gewinnen, meine Herren, vielleicht um selbst einmal damit vor die Öffentlichkeit zu treten, so müssen Sie sich vor allem nicht mit dem passiven Anhören dieser Vorträge zufrieden geben, sondern sich in die umfangreiche Literatur vertiefen und über die mannigfachen Fragen selbständig nachdenken. —

Lassen Sie uns jetzt, meine Herren, wenn wir uns zur Betrachtung der Organisation des mathematischen Unterrichts wenden, vorderhand den Ausblick nicht zu weit nehmen. Gingen wir gleich von vornherein auf die mannigfachen Nuancen der Schulorganisation in den verschiedenen deutschen Bundesstaaten oder gar im Ausland ein oder nähmen andrerseits auf die historische Entstehung der heutigen Verhältnisse Rücksicht, so würden wir uns nur verwirren. Hernach werden wir, wie ich schon sagte, auch von jenen Dingen reden müssen; zunächst wollen wir uns in der Hauptsache auf die gegenwärtigen Verhältnisse in Preußen beschränken.

Innerhalb dieser engeren Grenzen müssen wir aber die verschiedenen Schularten mit ihrem mathematischen Unterricht der Reihe nach betrachten, insofern wir uns doch einen Begriff von der Geltung unserer Wissenschaft innerhalb des gesamten Unterrichtswesens zu verschaffen wünschen. Ich denke auch an die Möglichkeit, daß Ihnen für die Zukunft vielleicht an dieser, vielleicht an jener Anstalt eine Laufbahn als Lehrer bevorsteht, und daß dazu eine Orientierung über das vielgestaltige Unterrichtswesen für Sie nützlich ist. Ja, selbst wenn Sie sich Ihren Weg schon genauer vorgezeichnet haben, dürfen Sie eine solche Umschau nicht für der Mühe unwert halten, denn jedes besondere, auch das eigene Anstaltswesen werden Sie stets nur im Rahmen des Ganzen richtig einschätzen.

Ich zähle die Schularten, die in Preußen zurzeit bestehen, in einem Schema auf. Da haben wir zunächst:

1. die Volksschulen oder Elementarschulen (in Städten auch Bürgerschulen, Gemeindeschulen genannt), für das 7. Lebensjahr und folgende. Es ist vielleicht nützlich, solche Normaljahre anzugeben, da die Namen der Klassen allenthalben verschieden sind, besonders aber einen Vergleich mit den ausländischen Verhältnissen sehr erschweren. Man kommt bei uns normalerweise sechs Jahre alt auf die Schule, also „im“ 7. Lebensjahr. Ferner:

2. die mittleren (Knaben-) Schulen und zwar
   a) die sechsklassigen: Progymnasien, Realprogymnasien und Realschulen (10. bis einschließlich 15. Lebensjahr), deren Absolvierung z. B. zu dem einjährig-freiwilligen Militärdienst berechtigt,
   b) die neunklassigen: (humanistische) Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen (10. bis einschließlich 18. Lebensjahr), deren Absolvierung zur Immatrikulation an Universitäten berechtigt; die sechs unteren Klassen der Anstalten b) laufen den Klassen von a) parallel. Weiter führe ich an:

3. die Mädchenschulen; die dürfen wir ja nicht vergessen. Der mathematische Unterricht liegt an ihnen, wie es heute ist, noch sehr im argen, und gerade er scheint mir gegen den heute herrschenden einseitig literarisch-ästhetischen Betrieb als ein Gegengewicht unbedingt erforderlich! Das ist, meine Herren, nicht einer der letzten Punkte bei dem großen Problem der Frauenfrage, das unsere Zeit so lebhaft bewegt. Sodann:

4. die Fortbildungsschulen und Fachschulen, von denen sich eine große Menge der verschiedensten Gattungen aufzählen ließe: Maschinenbauschulen, Baugewerkschulen, Seefahrtschulen, Handelsschulen, Kunstgewerbeschulen usw. Die Voraussetzungen zur

Aufnahme in solche Anstalten differieren außerordentlich; einige verlangen nur Absolvierung einer Volksschule, andere das Abgangszeugnis einer sechsklassigen mittleren Schule, und was derlei mehr ist. Endlich:

5. die Hochschulen: hauptsächlich Universitäten und technische Hochschulen. Auch auf deren Organisation werden wir später eingehen müssen, damit Sie von den Problemen und Gegensätzen, die in der Neuzeit an diesen Anstalten und zwischen diesen Anstalten hinsichtlich des mathematischen Unterrichts hervorgetreten sind, Kenntnis nehmen.

Es ist hier der Ort, gleich von vornherein auf den Umstand hinzuweisen, daß die Bezeichnung der deutschen Schulen vielfach die Einheitlichkeit vermissen läßt. Was wir vorhin absichtlich mit dem Namen „mittlere Schulen“ bezeichneten, das heißt in Süddeutschland ebenso wie in Österreich kurzweg „Mittelschule“, eine Bezeichnung, der man wohl allgemeine Verbreitung wünschen möchte. In Preußen dagegen nennt man eben diese Anstalten offiziell „höhere Schulen“ (so daß also die „höheren“ Schulen vor den „Hoch“-schulen zu absolvieren sind!) und versteht unter „Mittelschulen“ häufig, so z. B. auch hier in Göttingen, „gehobene“ Volksschulen, welche nach oben hin einige Klassen mehr als die gewöhnlichen Volksschulen besitzen. Demgemäß ist es oft erwünscht, sich etwas ausführlicher auszudrücken, wenn man nicht mißverstanden sein will; wir werden uns im folgenden der amtlichen Bezeichnung „höhere“ Schulen anschließen. —

In einem ersten Abschnitt wenden wir uns nun zu einer Besprechung der Volksschulen.

Erster Abschnitt.

Die Volksschulen.

Von den Angehörigen der höheren Lehrinstitute wird bisweilen mit einer gewissen Geringschätzung auf die Einrichtung der Volksschule herabgesehen, als seien da nur untergeordnete oder minderwichtige Interessen vertreten, als komme diese Anstalt jedenfalls mit den Einzelheiten ihres Unterrichts für unser Staatswesen nicht so erheblich inbetracht. Demgegenüber möchte ich Ihnen zunächst eine kleine Tabelle vorführen, die Ihnen zeigen mag, um was für große Zahlen es sich beim Volksschulwesen handelt.

Preußen (Stand von 1906)	an den Volksschulen	an den „höheren" Schulen	an den Universitäten
Anzahl der Lehrer (rund)	100 000	11 000	1 700
Anzahl der Schüler (rund)	6 000 000	200 000	25 000

Sie erkennen, meine Herren, jede Änderung beim Volksschulunterricht multipliziert sich in ihrer Wichtigkeit für das Ganze mit einem großen Zahlenfaktor; das wollen wir im Auge behalten.

Die Organisation der Volksschulen ist im einzelnen eine sehr verschiedene. Es gibt einklassige und mehrklassige Volksschulen. Auf dem Dorfe ist sehr häufig nur eine einzige Klasse vorhanden, wo es dann dem Geschick des Lehrers überlassen bleibt, wie er die Kinder der verschiedenen Altersstufen gleichzeitig geeignet zu beschäftigen versteht. In den Städten sind die Volksschulen mehrklassig, in Großstädten hat man in der Regel sieben bis acht Klassen, was also im letzteren Falle genau dem normalen Schulbesuch vom 7. bis zum 14. Lebensjahr entspricht. Wie dieser Schulbetrieb eingerichtet sein mag, das ersehen Sie etwa aus dem „Grundlehrplan der Berliner Gemeindeschulen"*), den ich Ihnen vorlege.

*) 3. Auflage, Breslau (Hirt) 1903.

An dieser Stelle will ich gleich auf ein Werk aufmerksam machen, das zum erstenmal auf amtlicher Grundlage eine statistische Zusammenstellung über die Organisation unserer sämtlichen deutschen Schulen enthält und das wir auch bei dem Studium der übrigen Schularten noch häufig zu Rate ziehen werden. Es ist das Werk, das unser Göttinger Professor *W. Lexis* auf Anregung des preußischen Unterrichtsministeriums für die Weltausstellung zu St. Louis 1904 herausgegeben hat: Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich*). Von den sechs umfangreichen Bänden beschäftigt sich der dritte allein ganz mit dem Volksschulwesen**). Im übrigen finden Sie die amtlichen preußischen Verfügungen über die Volksschulen, insbesondere auch die Lehrpläne und die Vorschriften für das Lehrerbildungswesen in einem ebenfalls von Fachmännern zusammengestellten Werke: Handbuch für Lehrer und Lehrerinnen⁰).

Die drei untersten Jahre der Volksschule (7., 8., 9. Lebensjahr) bilden die Grundlage des Schulbesuchs, die allen Knaben gemeinsam ist. Nach vollendetem 9. Lebensjahr geht ein Teil der Knaben zu den früher genannten „höheren Schulen" über. In Preußen haben die höheren Schulen freilich zum Teil ihre eigenen „Vorschulklassen" für das 7., 8., 9. Lebensjahr (Nona, Oktava, Septima) und sind also dann von der Volksschule unabhängig. Immerhin ist der dortige Betrieb dem Volksschulunterricht in der Hauptsache gleichartig, so daß wir diese Vorschulklassen nicht gesondert zu behandeln brauchen. —

Welche Rolle spielt nun die Mathematik in der Volksschule — Mathematik natürlich im weitesten Sinne verstanden —? Was für Gegenstände werden gelehrt? Das Rechnen beginnt bereits in der untersten Klasse und zieht sich durch alle Klassen hindurch, indem es auf den Oberklassen in den „bürgerlichen Rechnungsarten" gipfelt. Die „Raumlehre" dagegen wird in den drei Unterklassen noch nicht gelehrt, sie fängt erst in den Oberklassen an, sodaß die zu den höheren Schulen übergehenden Knaben dahin noch nichts von Raumlehre mitbringen.

Was in diesen Unterrichtsstunden an Stoff traktiert wird, mögen Sie etwa aus zwei Schulbüchern ersehen, die ich Ihnen vorlegen kann. Das ist zunächst: *K. Hellermann* und *L. Krämer*, Aufgaben für das Rechnen in deutschen Schulen⁰⁰), das in acht Heften, entsprechend

---

*) 6 Bände (I, II, III, IV1, IV2, IV3), Berlin (Asher) 1904.

**) Band III: Das Volksschulwesen und das Lehrerbildungswesen im Deutschen Reich, von *P. v. Giżycki, E. Clausnitzer, E. Walther* und *J. Matthies*, herausgegeben von *W. Lexis*, Berlin (Asher) 1904.

⁰) Leipzig (Hofmann) 1903.

⁰⁰) Hohe Stereotypauflage, Berlin (Oehmigke) 1904, bzw. 1903.

den acht Jahrgängen, erscheint; und andererseits: *P. Martin* und *O. Schmidt*, Raumlehre für Mittelschulen usw.*), drei Hefte. An diesen Büchern fallen uns verschiedene Punkte auf, die für den Volksschulunterricht überhaupt charakteristisch sind und die wir mit den Verhältnissen unseres Hochschulbetriebs in Kontrast setzen mögen.

1. Der Stoff ist immer konkret und anschaulich behandelt; es wird stets vom Besonderen zum Allgemeinen aufgestiegen. Ein Verfahren, wie es gelegentlich an der Hochschule vorkommen soll, daß man etwas zuerst für eine beliebige Zahl n ableitet, um sich hernach für alles weitere auf $n = 1$ zu spezialisieren, ein solches Verfahren würde hier vergeblich sein Analogon suchen.

2. Der Stoff ist im einzelnen sorgfältig pädagogisch durchgebildet; es werden auf jeder Altersstufe richtig bemessene Ansprüche an die Fassungskraft der Schüler gestellt. Wie oft dagegen werden bei uns die jungen Semester in den Anfangsvorlesungen mit den diffizilsten Feinheiten der Analysis traktiert, die durchaus ein gereiftes mathematisches Denken voraussetzen?

3. Die Auswahl des Stoffes ist durchaus von praktischen Gesichtspunkten geleitet. Allenthalben, in der Raumlehre so gut wie im Rechnen, wird an die Verhältnisse des täglichen Lebens angeknüpft; der ganze Unterricht ist in hohem Maße zugleich ein „Sachunterricht". Betrachten Sie nur einmal die blauen Umschläge der einzelnen Hefte des Hellermann-Krämer; hier finden Sie z. B. die wichtigsten Münzen in natürlicher Größe abgebildet, da die Hohlmaße, dort wieder einen ganzen Gewichtssatz, und so geht das fort, bis in den letzten Heften auch Wechselformulare, Coupons und dergleichen vorgeführt werden. In der Raumlehre werden die geometrischen Figuren überall der täglichen Umgebung entnommen. Das genannte Buch von *Martin* und *Schmidt* erscheint dabei besonders interessant durch die Anordnung des Stoffes nach sogenannten Formengemeinschaften. Das erste Heft handelt vom „Wohnort", wobei die Stube das erste Beispiel des Parallelepipedons, das Kirchenfenster ein solches für den Kreis bildet; das zweite Heft geht auf die „Feldflur" hinaus und lehrt z. B. an dem Vermessen von Ackergrundstücken den Inhalt von beliebigen Parallelogrammen und Dreiecken erfassen; das dritte Heft endlich lenkt den Blick auf die „Kulturstätten", wo sich in der Betrachtung des Eisenbahndamms, der Wegrampe, des Brückenbogens, der Eisenbahnkurve mannigfacher Anlaß zu geometrischen Aufgaben bietet.

4. Die Darstellung des Stoffes ist durchweg dogmatisch; eigentliche Beweise werden nicht gegeben, noch viel weniger kennt

*) Berlin (Gerdes & Hödel), etwa 1897.

man das starre euklidische Schema „Voraussetzung — Behauptung — Beweis“. In der Raumlehre wird beständig an die unmittelbare Anschauung appelliert. Im Rechnen wird vor allem gezeigt, wie man rechnet, eigentlich nicht, warum man so rechnet. Auf den höheren Stufen wird dabei natürlich ein gewisses Gefühl dafür vorausgesetzt, daß eine erlernte Regel vernünftig ist.

In dem vierten Punkt, meine Herren, haben Sie den charakteristischen Unterschied von der Lehrart, die an den höheren Schulen herrscht. Dieser Unterschied brauchte allerdings nicht so ausgeprägt zu sein, so möchte man wünschen. Aber da kommt inbetracht, daß die Vorbildung der Volksschullehrer in ziemlich einseitige Bahnen gelenkt ist. Ich komme hernach darauf zurück.

Der ganze Betrieb, von dem wir soeben einige wesentliche Punkte namhaft machten, hat seine große historische Entwicklung durchgemacht. Seine moderne Gestalt geht in den Grundzügen auf den berühmten schweizerischen Pädagogen *H. Pestalozzi* (lebte 1746 bis 1827) zurück, der durch seine mannigfachen Anregungen dem gesamten Elementarunterricht eine neue Basis gegeben hat. Allgemeine Ausbildung der Kräfte der Menschennatur war sein Grundsatz aller Erziehung; als Ausgangspunkt forderte er überall die unmittelbare Anschauung. Ohne auf die an ihn anknüpfende Entwicklung näher einzugehen, die naturgemäß mit der allgemeinen Geschichte der Pädagogik auf das engste zusammenhängt, will ich Ihnen doch noch die Namen dreier Männer anführen, die für die Weiterbildung der *Pestalozzi*schen Ideen gerade auch nach Seiten des mathematischen Unterrichts von Bedeutung gewesen sind: *J. F. Herbart* (1776 bis 1841), *A. Diesterweg* (1790 bis 1866) und *F. Fröbel* (1782 bis 1852). In ihrem Wirken steht überall das Psychologische im Vordergrunde des Interesses, wie denn *Herbart* geradezu eine systematische Anwendung der Psychologie auf die Pädagogik versuchte. Unser heutiger mathematischer Universitätsunterricht ist von einem solchen pädagogischen Betriebe meistens so verschieden wie nur möglich. Da ist vielfach allein das Logische Trumpf, und die Berücksichtigung der psychologischen Möglichkeiten wird darüber beiseite geschoben. Ob das wirklich zweckmäßig ist? man kann zweifeln. —

Betrachten wir nun das Lehrerbildungswesen. Die Volksschullehrer werden in Preußen — um von den übrigen Bundesstaaten abzusehen — in einem sechsjährigen Kurse zu ihrem Beruf ausgebildet, sie haben drei Jahre die sogenannte Präparandenanstalt und dann drei Jahre das Lehrerseminar (Volksschullehrerseminar) zu besuchen.

Das Charakteristische in dem mathematischen Unterrichtsbetrieb der letzteren Anstalten, deren es in Preußen ungefähr 140 gibt, lassen

Sie mich in drei Punkte formulieren: 1. Der Stoff ist im wesentlichen derselbe, wie er in den sechs Unterklassen der höheren Schulen gelehrt wird, also ein Stoff, den etwa ein Gymnasiast mit dem 15. Lebensjahr erledigt hat. 2. Der Hauptnachdruck liegt auf der pädagogischen Durcharbeitung dieses engumgrenzten Stoffes; es werden vor allem Unterrichtsmethoden und ihre historische Entwicklung gelehrt. Der angehende Lehrer erfährt z. B., um etwas Spezielles anzuführen, was für mannigfache Auffassungen darüber entwickelt sind, wie man im Kinde die Bilder der Zahlen entstehen lassen soll, und dergleichen. 3. Am charakteristischsten aber ist die Einordnung in das Prinzip der enzyklopädischen Ausbildung. An unseren höheren Schulen haben wir ja ein entwickeltes Fachlehrersystem, wir haben eigene Germanisten, wir haben Altsprachler, Neusprachler, Mathematiker usw. An der Volksschule gibt es so etwas nicht und kann es jedenfalls auch nur in beschränktem Maße geben. Hier muß in zahlreichen Fällen der Lehrer alles können. Wie wäre es auch anders durchzuführen, wenn z. B. an einer Dorfschule der ganze Unterricht in der Hand eines einzigen Lehrers liegt? Jeder Seminarist wird deshalb in allen Fächern gleichmäßig ausgebildet, und so kommt es, daß es gar zu leicht an jeder wissenschaftlichen Vertiefung fehlt. Man wird die Unumgänglichkeit jenes Verfahrens nicht ohne weiteres in Abrede stellen. Aber dennoch möchte man hie und da einige Milderung wünschen, wenn man von krassen Fällen hört, wo eine übergroße Menge des totesten Wissensstoffes in den angehenden Lehrer eingefüllt wird, die er gewiß nicht verarbeiten kann. Von da aus erscheint eine Reform der Lehrerseminare, die der Persönlichkeit der Auszubildenden mehr Spielraum läßt, in der Tat sehr zeitgemäß!

Im Anschluß an diese Frage müssen wir einer großen Bewegung gedenken, die darauf abzielt, den Volksschullehrern die Pforten der Universität zu öffnen. Daß einzelne Volksschullehrer dort als Hospitanten zugelassen werden, war immer üblich. Was man aber jetzt will, ist weit mehr: man will, daß es für die Volksschullehrer Regel sei, mehrere Semester an der Universität immatrikuliert zu sein. Das Treibende ist auf der einen Seite wirklicher Wissensdrang; aber daneben steht das unverkennbare Streben nach größerer Dignität des Standes, nach einer angeseheneren gesellschaftlichen Stellung, die man durch den Universitätsbesuch zu erlangen hofft! Dieses Streben nach größerer Dignität geht in unserer Zeit lebhaft durch alle Stände. Allenthalben schraubt man die Berechtigungen zum Eintritt in einen Stand höher, um ihn dadurch vornehmer zu machen. Besonders das Abiturium, die Reifeprüfung, die den Abschluß einer neunklassigen höheren Schule bildet, wird

in dieser Beziehung stark umworben. Zahnarzt oder Tierarzt z. B. kann man neuerdings in Preußen nur noch werden, wenn man das Abiturium gemacht hat. Der Typus des privilegierten Standes, dem die anderen es dabei gleichzutun suchen, ist der Juristenstand. Und zu dem Zwecke legen sich alle Stände weitgehende Verpflichtungen auf, die ihnen selbst äußerst lästig fallen müssen — alles um der „Dignität“ willen!

Die hier berührte Volksschullehrerfrage beansprucht aber das allgemeinste Interesse. Bei der außerordentlich großen Anzahl der Volksschullehrer — ich nannte Ihnen schon die Zahl 100 000 für Preußen — haben in unserem konstitutionellen Staate die Ansichten dieses Standes ein praktisches Gewicht und können erwarten, daß man sie eingehend prüft. Ich möchte, was die allgemeine Zulassung der Volksschullehrer zur Universität betrifft, eine Hauptfrage aufstellen: Wird das Geforderte möglich sein?

Hier sollte jeder, meine Herren, der in der Sache ein Urteil fällt, bedenken, welche gewaltige Umwälzung im Betrieb der Hochschulen durch das Zuströmen der Volksschullehrer entstehen müßte. Da nämlich, wie bemerkt, die Volksschullehrer eine mehr pädagogisch-enzyklopädische Vorbildung als eine spezifisch wissenschaftliche bzw. fachwissenschaftliche besitzen und auch an dem Prinzip einer solchen Ausbildung im allgemeinen festhalten müssen, so wäre es ganz unmöglich für sie, an den Vorlesungen, wie sie jetzt für die Abiturienten der höheren Schulen gehalten werden, zu partizipieren. So ist es jedenfalls in der Mathematik, und in den übrigen Fächern wird es kaum wesentlich anders sein. Es müßten demnach völlig neue Vorlesungen für die Volksschullehrer an den Universitäten eingerichtet werden; es würde eine große Zahl neuer Dozenten eines neuen Typus nötig sein, denn die Anzahl der Studierenden würde ja sehr beträchtlich anschwellen. Man sieht: ohne eine durchgreifende Umgestaltung unseres ganzen Universitätswesens ginge es gar nicht ab! Die bestehenden Lehrerseminare einer zeitgemäßen Reform zu unterziehen, in dem Sinne wie ich vorhin andeutete — das dürfte viel einfacher und aussichtsreicher sein.

Wir stehen da vor ernsten Fragen, meine Herren, an denen Sie vielleicht selber einst mitzuarbeiten berufen sind. Ich kann Sie nur auffordern, Ihr Interesse solchen Dingen gegenüber nicht zu verschließen. Wir können beim Studium der Volksschulverhältnisse in der Tat für uns selbst vielerlei lernen. Und außerdem möchte ich noch folgende Punkte geltend machen.

Als Oberlehrer an einer höheren Schule müssen Sie den Standpunkt der Volksschule verstehen und würdigen können; denn die höhere Schule schließt sich doch an die Volksschule an,

und auch auf den beiden untersten Klassen der höheren Schulen (10., 11. Lebensjahr) liegt der Rechenunterricht zumeist in der Hand von „Elementarlehrern“, d. h. seminarisch gebildeten Lehrern, die an den höheren Schulen beschäftigt werden. Es ist in einer Hinsicht vielleicht sogar gut, daß es so ist; man sagt nämlich, daß die Elementarlehrer die jüngeren Knaben mit größerem pädagogischen Geschick unterrichten. Andererseits liegen ihnen freilich die beim höheren Unterricht hervortretenden Gesichtspunkte verhältnismäßig fern. Aber deshalb soll um so mehr der Oberlehrer den Standpunkt seiner Kollegen von Volksschullehrerbildung verstehen, um an den Unterricht in den untersten Klassen richtig anknüpfen zu können. Bei der Übernahme des Unterrichts durch den Oberlehrer entsteht sonst eine sehr beklagenswerte Diskontinuität, die unter anderem zur Folge hat, daß auf den späteren Klassen das numerische Rechnen vernachlässigt und vergessen, wenn nicht gar verachtet wird. Und was für ein jammervoller, doch nicht allzu seltener Zustand ist es, wenn den Tertianern bei Behandlung der linearen Gleichungen unklar bleibt, daß sie in der früher erlernten Regeldetri alle die zur Auflösung der Gleichung erforderlichen Schritte in andrer Form schon gemacht haben.

Schließlich ist es aber auch ein sozialer Gesichtspunkt, der uns zu einer Beschäftigung mit dem Volksschullehrerwesen verpflichtet. Gerade in Deutschland hat sich viel zu sehr der Mißstand hervorgekehrt, daß die Höhergebildeten in ihrem Fühlen und Denken sich den Wenigergebildeten entfremdet haben. Die Aufgabe Ihrer Generation ist es, an der Bekämpfung dieser unheilvollen Trennung mitzuarbeiten. Wir dürfen es nicht verschmähen, uns eingehend mit der Frage zu beschäftigen, was denn unsere Wissenschaft im Rahmen der gesamten Volksbildung bedeutet! —

Als eine Ergänzung zu den Volksschulen sind die sogenannten Fortbildungsschulen für Lehrlinge usw., dann aber auch die sogenannten Volkshochschulkurse aufzufassen, die aus dem Prinzip entstanden sind, die wissenschaftliche Bildung weitesten Kreisen des Volkes zu übermitteln („university extension“). Von Seiten der akademisch gebildeten Mathematiker könnte hier manches geschehen, geschieht jedoch bisher wohl nur wenig. Was zunächst die Fortbildungsschulen für Handwerker und Lehrlinge angeht, wo diese jungen Leute (14. bis 18. Lebensjahr) in den Abendstunden unterrichtet werden, so ist hier die Mathematik in der Hauptsache auf das Pensum der Volksschule beschränkt, das im Hinblick auf die praktische Tätigkeit der Leute vielseitig durchgeübt wird; daneben nach Bedürfnis eine fachmäßig betriebene darstellende Geometrie. Auf der andern Seite aber, in den Fortbildungskursen für Erwachsene, etwa

aus dem Arbeiterstande, wird die Mathematik meistens, abgesehen von ganz elementaren Ansätzen, überhaupt beiseite gelassen. Man pflegt sich dort auf Vorträge über Literatur, Astronomie oder Elektrizitätslehre usw. zu beschränken, indem man vielleicht fürchtet, die Mathematik möchte hier kein Interesse finden. Man sollte wissen, daß es eben Kunst des Lehrers ist, für den Gegenstand Interesse zu erwecken; Anknüpfungspunkte bieten sich dafür wahrlich genug.

Als Vorbild könnten hier z. B. die berühmten Arbeiterkurse gelten, die der Mathematiker und Ingenieur *John Perry* in London gehalten und deren Lehrgang er in einer kleinen Schrift niedergelegt hat: Practical Mathematics*). Das Büchlein, das an die Grundlehren der analytischen Geometrie und selbst der Differential- und Integralrechnung heranführt, ist höchst amüsant zu lesen: *Perry* besitzt ein großes Geschick darin, immer von neuem wieder durch Kunstgriffe die Aufmerksamkeit seiner Zuhörer auf seinen Gegenstand zu konzentrieren. Hier nur ein paar Beispiele.

Es liegt *Perry* vor allem daran, seine Hörer mit den rechtwinkligen xy-Koordinaten vertraut zu machen, denn ein Verständnis für die graphische Darstellung, für den geometrisch gefaßten Funktionsbegriff, ist heutzutage auch für den Nichtgelehrten von großer Wichtigkeit. Zu dem Zweck werden von vornherein Übungen im Zeichnen auf Koordinatenpapier angestellt. Besonders interessant ist aber die Art, wie *Perry* den Koordinatenbegriff als Mittel zur Ortsbestimmung einführt (Seite 53 ff.). Er sagt dort: „Ich will Ihnen eine Geschichte erzählen, welche nicht wahr ist.“ (Hätte er gesagt, „welche wahr ist“, es würde nicht so wirksam sein.) Und nun erzählt er von einem reichen Manne, der einen großen Schatz auf seinem Besitztum vergraben hat und stirbt. Die Enkelin des Erblassers — Dorothea Ollendorf heißt sie — findet, daß das Testament nichts als die Zeichen enthält: $x = 200$, $y = 27$. Da sagt sie dann: „Ich bin zwar nur ein ungelehrtes Mädchen, aber das sieht ja jeder ein, was damit gemeint ist: Ich soll eben 200 Meter auf der Straße entlang gehen und dann 27 Meter seitwärts ins Feld, dort wird das Geld liegen . . .“ usw. usw.

Ein anderes Mittel, das *Perry* anwendet, ist, daß er bei der Geltung, die das Euklidstudium in England traditionellerweise für den Elementarunterricht besitzt, alle paar Seiten einmal gründlich auf *Euklid* schilt. „Wir haben nicht so viel Zeit wie *Euklid*,“ heißt es, „wir wollen die Sache hier praktisch anfassen“ und so geht das fort. Ein solches Mittel verfehlt nie seine Wirkung. Wenn es nicht unmoralisch wäre, möchte ich Ihnen selbst geradezu für den späteren

*) London (Wyman) 1899.

Bedarf vor geeignetem Publikum diesen Trick empfehlen: Man schilt erst weidlich auf die Theoretiker; „so viel Zeit und Geduld haben wir nicht, wir werden das viel einfacher machen;“ damit sind die Hörer gewonnen —; „nun müssen wir noch einige kleine Vorbereitungen treffen,“ und dann machen Sie es genau so, meine Herren, wie es für die mathematische Erfassung der Dinge einmal unerläßlich ist. —

Damit möchte ich das wenige beenden, was ich von den Volksschulen und den anschließenden Fortbildungsschulen sagen wollte, und wir wenden uns nun zu den höheren Schulen.

Zweiter Abschnitt.

Die sechs unteren Klassen der höheren Knabenschulen.

Ausführliche statistische Mitteilungen über die höheren Knabenschulen nach dem Stande von 1902, bzw. 1903 finden Sie in dem II. Bande des [Seite 11] schon genannten *Lexis*schen Werkes*); wir geben daraus einiges wenige wieder und werden uns betreffs der Zahlenangaben auf die amtlichen „Statistischen Mitteilungen über das höhere Unterrichtswesen" von 1906**) beziehen, die den Stand vom Winter 1905/06 angeben. Wir haben von neunklassigen Anstalten, sogenannten „Vollanstalten", folgende drei Arten nebeneinander, die wir mit je einem Stichwort hinsichtlich ihres altsprachlichen Unterrichts versehen wollen:

1. (Humanistisches) Gymnasium: Latein und Griechisch,
2. Realgymnasium: Latein,
3. Oberrealschule: keine alte Sprache.

Die sechsklassigen Anstalten, die „Nichtvollanstalten", deren Klassen den sechs untersten Jahresstufen jener Vollanstalten entsprechen, die zum Abschluß dieser aber eine Abgangsprüfung haben, heißen bezüglich:

1. (Humanistisches) Progymnasium,
2. Realprogymnasium,
3. Realschule.

Progymnasium und Realprogymnasium sind dem Unterbau des Gymnasiums, bzw. des Realgymnasiums im wesentlichen gleich. Die Realschule dagegen hat eine selbständigere Stellung und Bedeutung; sie

*) Band II: Die höheren Lehranstalten und das Mädchenschulwesen im Deutschen Reich, von *C. Rethwisch*, *R. Lehmann* und *G. Bäumer*, herausgegeben von *W. Lexis*, Berlin (Asher) 1904.

**) Erscheint jährlich als Beilage zu dem im Ministerium herausgegebenen: Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen, Berlin (Cotta); obiges Heft als Beilage zum Jahrgang 1906, erschienen 1907.

heißt eben auch nicht eine „Pro-Oberrealschule“. Unsere Breslauer Kommission hat jenem selbständigeren Charakter Rechnung zu tragen gesucht, indem sie dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Realschulen in dem [Seite 6 zitierten] Stuttgarter Bericht einen besonderen Abschnitt gewidmet hat.

An den höheren Knabenschulen Preußens insgesamt werden zurzeit rund 11000 Lehrer beschäftigt und 200000 Schüler unterrichtet. Die Gesamtzahl der Anstalten beträgt 727, die sich folgendermaßen auf die verschiedenen Arten verteilt:

327	Gymnasien	38	Progymnasien
103	Realgymnasien	36	Realprogymnasien
55	Oberrealschulen	168	Realschulen
485	Vollanstalten.	242	Nichtvollanstalten.

Sie sehen, die bei weitem vorwiegende Zahl der Vollanstalten sind Gymnasien.

Die Klassen unserer neunklassigen Anstalten werden von unten nach oben mit folgenden Namen bezeichnet: Sexta (VI), Quinta (V), Quarta (IV), Untertertia (III b), Obertertia (III a), Untersekunda (II b), Obersekunda (II a), Unterprima (I b), Oberprima (I a). Die sechsklassigen Anstalten gehen entsprechend von Sexta bis Untersekunda; nur an der Realschule ist es üblich, die alten Bezeichnungen zu vermeiden und die Klassen einfach mit VI, V, IV, III, II, I zu benennen. Ebenso wie die Absolvierung einer Nichtvollanstalt berechtigt an den Vollanstalten die Versetzung nach Obersekunda zum einjährig-freiwilligen Militärdienst. Wir lassen die sechsklassigen Anstalten, soweit sie irgendwo geringe Abweichungen von den sechs Unterklassen der neunstufigen Anstalten bieten, im folgenden außer acht, damit wir uns nicht unnötig verwirren. —

Für den Mathematikunterricht der sechs Unterklassen der höheren Schulen Preußens schreiben die amtlichen Lehrpläne von 1901*) (Seite 4 ff.) folgende Anzahlen von Wochenstunden vor:

Mathematik	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	Summe
Gymnasium	4	4	4	3	3	4	22
Realgymnasium	4	4	4	5	5	5	27
Oberrealschule	5	5	6	6	5	5	32

*) Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen, von 1901, Halle (Waisenhaus) 1902.

Was im einzelnen in diesen Stunden zu unterrichten ist, das finden Sie weiterhin in den Lehrplänen unter „Rechnen und Mathematik“. Da werden auf den Seiten 52 bis 56 das „allgemeine Lehrziel“ und die „Lehraufgaben“ der einzelnen Klassen angeführt, auf Seite 57 bis 60 folgen allgemeinere „methodische Bemerkungen“ dazu.

Meine Herren, diese Lehraufgaben und die methodischen Bemerkungen sind nicht durchweg aufeinander abgestimmt. Das gilt vor allem im Hinblick auf eine Sache, die uns hier ganz besonders interessieren muß. Sie macht, wie ich in der Einleitung [Seite 6] schon kurz andeutete, den Kern der modernen Unterrichtsreformbewegung aus; ich meine den Funktionsbegriff und seine Verwendung in den verschiedenen Gebieten. Dabei handelt es sich — das wollen Sie im Auge behalten — immer um den Funktionsbegriff

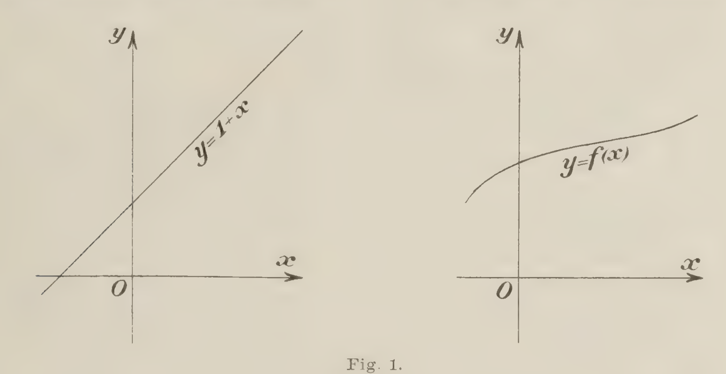


Fig. 1.

in geometrischer Form, also darum, ob man Figuren wie die hier stehenden auf der Schule bringen soll und wo das zu geschehen hat. Solche Fragen sind ohne Zweifel von einschneidender Bedeutung. Denn, meine Herren, die graphischen Darstellungen durchsetzen nicht nur die große moderne Literatur der exakten Fächer, sondern man kann sagen: sie durchsetzen das ganze Leben der Gegenwart!

Während nun die methodischen Bemerkungen in diesem Punkt einen fortschrittlichen Charakter zeigen, erscheint die Stichwörteraufzählung der Lehraufgaben von den Forderungen der Zeit nur wenig beeinflußt. Die Lehraufgaben vermeiden es völlig, vom Funktionsbegriff zu sprechen; der Koordinatenbegriff wird erst für Prima angesetzt. Die methodischen Bemerkungen indes verlangen, daß im mathematischen Unterricht „den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffs, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden“ seien, erschlossen werde. Man darf annehmen, daß die Schulverwaltung die Absicht hatte und die Absicht hat, den berechtigten Forderungen der Zeit zu genügen, aber bei der Ab-

fassung der Lehrpläne von 1901 ist es eben noch nicht zu einer ins einzelne gehenden Formulierung gekommen. Bei solcher Auffassung wäre es schließlich, meine Herren, da die Lehrer nur von der ihnen gewährten Freiheit Gebrauch zu machen hätten, in diesem Punkt gar nicht so wichtig, die Lehrpläne zu ändern — wenn nicht eben jener Hinweis der methodischen Bemerkungen für gewöhnlich ganz unbeachtet bliebe!

Doch lassen Sie uns den mathematischen Lehrplan der sechs Unterklassen des Gymnasiums genauer betrachten; ich stelle folgende Tabelle zusammen:

Klasse	Gymnasium *Arithmetik*	Gymnasium *Geometrie*
VI	Rechnen, ähnlich wie in den Oberklassen der Volksschule, jedoch überleitend zum Buchstabenrechnen.	—
V		—
IV		Propädeutischer Kurs. Lehre von den Winkeln und vom Dreieck.
IIIb	Buchstabenrechnen bis zu den Gleichungen ersten Grades.	Lehre vom Parallelogramm und vom Kreis.
IIIa	Proportionen. Gleichungen ersten Grades (Fortsetzung). Potenzen.	Kreislehre (Fortsetzung). Flächeninhalt (Pythagoras).
IIb	Potenzen (Fortsetzung) und Wurzeln. Logarithmen. Quadratische Gleichungen.	Ähnlichkeitslehre. Kreisumfang, -inhalt.

Dazu eine Bemerkung betreffs des sogenannten Ersatzunterrichts. An manchen Gymnasien und Progymnasien, etwa 50 an der Zahl, ist vorgesehen, daß für die Schüler, die mit Untersekunda abgehen wollen, das Griechische fakultativ*) ist. Diese Einrichtung erklärt sich aus dem Umstande, daß die Zahl der humanistischen Anstalten, wie aus der vorhin [Seite 20] mitgeteilten Tabelle hervorgeht, in der Gesamtheit der höheren Schulen bisher stark überwiegt. Man überlegte, daß es für den Schüler eines Gymnasiums oder Progymnasiums, der mit dem Einjährigenzeugnis abgehen will, keinen

*) „Fakultativ" ist bei uns immer in dem Sinne verstanden, daß der Schüler vor Beginn des betreffenden Unterrichts wählen kann, ob er teilnehmen will oder nicht. Hat er sich einmal entschieden, so ist er ebenso wie bei den obligatorischen Unterrichtsstunden zu regelmäßiger Teilnahme verpflichtet, und zwar auf mindestens ein halbes Jahr.

rechten Wert hat, wenn er drei Jahre (IIIb, IIIa, IIb) Griechisch lernt, da sich in der kurzen Zeit auf dieser Stufe nichts Abgeschlossenes von Bedeutung erreichen läßt. Man stellt es daher einem solchen Schüler frei, auf das Griechisch zu verzichten und dafür andere Dinge zu lernen, die für sein späteres Leben nutzbringender sind. Die am Griechischen eingesparten Wochenstunden, das sind für jede Klasse sechs, werden verteilt in je drei Stunden Englisch, zwei Stunden Französisch (bzw. eine Stunde Französisch und eine Stunde Naturwissenschaften) und eine Stunde Mathematik. Die eine Mathematikstunde wird dazu verwendet, die bis dahin erworbenen mathematischen Kenntnisse noch zu festigen und etwas abzurunden; es werden kaufmännisches Rechnen, die Grundbegriffe der Stereometrie und etwas Trigonometrie gelehrt. Auf diese Einrichtung des Ersatzunterrichts und auf das Übergewicht der humanistischen Anstalten gedenke ich später zurückzukommen.

Vergleichen wir mit dem vorgeführten Lehrplan der Gymnasien den entsprechenden der Realanstalten (Realgymnasien und Oberrealschulen), wo an Stelle der 22 Stunden bezüglich 27 und 32 Stunden Mathematik unterrichtet werden, so ist ein durchgreifender Unterschied nicht zu finden. Wir müssen sagen, daß die Realanstalten auf den sechs Unterklassen bei ihrem breiteren Betriebe das entsprechende mathematische Lehrpensum des Gymnasiums nur um einige kleine Kapitel hier und dort erweitern, daß sie einen wesentlichen Vorsprung darin nicht erreichen. So ist auf der Oberrealschule der propädeutische Geometriekurs schon für Quinta angesetzt. Die vorhandene größere Stundenzahl wird auf beiden Realanstalten dazu verwandt, daß die Lehrgegenstände weiterhin ein wenig nach den unteren Klassen hinabgerückt erscheinen; die Proportionen und die Lehre vom Flächeninhalt gehören zum Pensum der Untertertia, die Potenzen, Wurzeln, quadratischen Gleichungen, sowie die Ähnlichkeitslehre und die Kreisberechnung nach Obertertia. Im Lehrplan der Untersekunda findet man die Gegenstände, die auf dem Gymnasium nur in dem soeben erklärten „Ersatzunterricht“ gelehrt werden. Endlich sind noch perspektivisches Zeichnen und „Anwendungen der Algebra auf die Geometrie“ (d. h. Konstruktion algebraischer Ausdrücke mittels Lineal und Zirkel, was von analytischer Geometrie wohl zu unterscheiden ist!) hinzugefügt.

Sie sehen, es ist kein wirklich höheres Lehrziel zu erkennen. Allerdings mag die Oberrealschule gegenwärtig wohl mit dem Umstande rechnen müssen, daß in weiten Kreisen das Gymnasium noch als die vornehmere Anstalt gilt und den Oberrealschulen infolge davon ein weniger gutes Schülermaterial zuströmt. Das rechtfertigt für den Augenblick zu einem Teil den dortigen Verzicht auf ein weitergehendes Lehrziel der betrachteten Unterstufe. Trotzdem aber darf

man das Ziel der faktischen Gleichwertigkeit aller höherer Lehranstalten nicht aus dem Auge verlieren, und daher kann man jene Rücksicht nicht als eine prinzipielle gutheißen. Es scheint hier und an manchen anderen Stellen, die wir in der Folge nennen könnten, doch die Idee mitgewirkt zu haben, die Humanisten als Träger aller Berechtigungen zu schonen und darum die Realisten keine höhere Lehrstufe nach irgend einer Richtung erreichen zu lassen, damit sie den Humanisten nicht in bestimmter Hinsicht unbedingt voraus seien! —

Wir kommen jetzt zu den Lehrmethoden. Hier ist zu bemerken, daß dem Lehrer jedenfalls neuerdings ziemlich viel Freiheit in der Behandlung des vorgeschriebenen Stoffs gelassen ist; ganz anders als bei dem Volksschullehrer, der ja in dieser Hinsicht durch die spezifische Ausbildung, von der wir sprachen, und auch durch die Reglements mehr gebunden ist. Hinzu tritt noch der weitere Gegensatz, daß die höhere Schule auf Allgemeinbegriffe hinarbeiten muß, wo die Volksschule beim Speziellen stehen bleibt, und daß zu dem bloß anschauungsmäßigen Erfassen der logische Beweis hinzutritt. Es ist jedoch nicht so zu verstehen, als ob hier von vornherein mit schwieriger logischer Behandlungsweise begonnen würde, sondern es herrscht durchaus die genetische Methode vor. Die Anschauung bildet die Grundlage der Erkenntnis und erst allmählich wird auf ein Bewußtwerden des Logischen hingearbeitet. Wenn früher einmal eine systematische Darstellungsweise überwogen hat, die das Formale ungebührlich betonte, seit mehreren Jahrzehnten hat sich das nach und nach geändert; heute ist sie auf der deutschen Schule außer Kurs. Sie erkennen diesen Sieg der genetischen Methode am deutlichsten aus der Einrichtung des erwähnten propädeutischen Geometrieunterrichts. Aber auch höher hinauf verfährt der Lehrer immer genetisch oder noch genauer gesagt: heuristisch, d. h. er läßt die Knaben das Neue durch geschickte entwickelnde Fragen nach Möglichkeit selber finden. Sie sehen, meine Herren, hier zeigen sich auch starke Unterschiede gegenüber dem Lehrbetrieb, wie er an den Hochschulen meist üblich ist; und man kann wieder fragen, ob nicht mancher Kollegvortrag an pädagogisch-psychologischer Durcharbeitung von dem heutigen Schulunterricht lernen könnte.

Weiteren Aufschluß über die Art des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen können Sie aus zwei Büchern entnehmen, die für den Lehrer Wichtigkeit haben: 1. *F. Reidt*, Anleitung zum mathematischen Unterricht*), 2. *M. Simon* und *J. Kießling*, Didaktik und Methodik des Rechnen-, Mathematik- und Physik-

*) Berlin (Grote) 1886.

unterrichts*). In letzterem Buche kommt für uns hier nur der von *Simon* geschriebene Abschnitt über Rechnen und Mathematik in Betracht. Die beiden genannten Bücher, die sich großer Verbreitung erfreuen, sind nicht mehr ganz neu. Insbesondere dürfte *Reidt* mit seiner Proklamation der formalen Bildung als des eigentlichen und hauptsächlichen Zieles des mathematischen Unterrichts heute zum Teil veraltet sein. In Deutschland ist in jüngster Zeit wohl kein namhaftes umfassenderes Werk über mathematische Methodik geschrieben worden. Ich will Sie aber zur Ergänzung noch auf die österreichischen amtlichen Instruktionen**) hinweisen, die bei uns wenig bekannt zu sein scheinen. Sie behandeln die methodischen Fragen ziemlich ausgiebig und dürften von fachkundiger Hand redigiert sein.

Was nun die mathematischen Lehrbücher für unsere höheren Knabenschulen (zunächst für ihre sechs unteren Klassen) angeht, so gibt es deren außerordentlich viele. Dabei ähneln sie einander vielfach so, daß eine Besprechung einer größeren Anzahl ebenso ermüdend wie unnütz wäre. Ich möchte mich daher zu Anfang auf eine Auswahl von drei Büchern beschränken. Vorweg aber will ich Sie noch auf einen wichtigen Punkt aufmerksam machen, den wir uns bei der Beurteilung aller zu besprechenden Schulbücher immer gegenwärtig halten müssen. Wir dürfen nicht von dem Charakter des benutzten Lehrbuchs unmittelbar auf den Charakter des Unterrichts schließen wollen. Es ist ja keineswegs das Kennzeichen eines schlechten Lehrers, wenn man sich nicht in allem und jedem an das Schulbuch bindet. Wir werden oft zu erwarten haben, daß der Lehrer den Stoff genetisch zu behandeln pflegt, obwohl das neben dem Unterricht benutzte Lehrbuch systematischen Charakter zeigt, und daß er das Buch nur als Leitfaden verwendet, aus dem der Schüler das Endergebnis des genetischen Gedankengangs jederzeit in präziser Formulierung nachlesen kann. Dabei bleibt dann dem Lehrer überdies noch freie Hand, in welcher besonderen Weise er genetisch vorgehen will.

Die drei Bücher, die ich Ihnen nunmehr nennen will, wähle ich aus, weil sie wohl etwas Typisches bieten und auch eine stärkere Verbreitung genießen. Da ist: 1. *L. Kambly*, Die Elementar-Mathematik, für den Schulunterricht bearbeitet, I. Arithmetik und Algebra,

---

*) München (Beck) 1895; Separatabdruck aus *A. Baumeister*, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen, 4 Bände, München (Beck) 1895—1898; eine 2. Auflage ist seit 1902 im Erscheinen begriffen.

**) Lehrpläne und Instructionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich, 2. Auflage, Wien (Schulbücherverlag) 1900; Instructionen für den Unterricht an den Realschulen in Österreich im Anschlusse an einen Normallehrplan, 5. Auflage, ebenda 1899.

II. Planimetrie; beide liegen in hohen Stereotypauflagen vor*). Die Anordnung des Stoffes ist hier noch durchaus systematisch; verbindender Text fehlt. Die vorhin betonte genetische Methode ist in den alten Kambly nicht eingedrungen. Gleichwohl wird das Buch sehr viel gebraucht; wir dürfen es uns wohl meist so benutzt denken, wie ich das eben andeutete. — Weiter nenne ich: 2. *G. Holzmüller*, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik, I. Teil**). Mit „methodisch" meint der als mathematischer Pädagoge bekannte Verfasser dasselbe, was wir vorhin als genetisch aufbauend bezeichneten. *Holzmüller* vermeidet geflissentlich alles Schematisieren und gibt einen glatt stilisierten verbindenden Text, der für den Lehrer in der Art der Behandlung vorbildlich sein kann. Auch der geometrische Vorkurs wird in dieser Weise ausgeführt. In ihm sowie auch weiterhin wird überall die Fertigkeit des Zeichnens besonders betont, wobei der Verfasser bis zum perspektivischen Zeichnen schwierigerer Raumfiguren vordringt. — Endlich: 3. *Heinrich Müller*-Charlottenburg, („Mathematisches Unterrichtswerk"): Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, Ausgabe A für Gymnasien, I. Teil⁰). Dieses Buch, dessen Verfasser jüngst auch mit dem Artikel „Rechnen und Mathematik" in dem neuen „Handbuch für Lehrer höherer Schulen"⁰⁰) hervorgetreten ist, nimmt zwischen den beiden erstgenannten sozusagen eine Mittelstellung ein. Es gibt einigen verbindenden Text, ordnet jedoch schematisch unter Stichworte, wobei das genetisch Aufbauende nicht in dem Maße hervorgekehrt wird wie bei *Holzmüller*. — Soviel wollte ich an allgemeinem über diese Bücher sagen. —

Meine Herren, es interessierte mich einmal nachzusehen, inwieweit die angeführten Lehrbücher für die sechs unteren Klassen auf den Funktionsbegriff Rücksicht nehmen. Es hieß ja in den methodischen Bemerkungen der Lehrpläne von 1901, die Schüler sollten mit dem Funktionsbegriff auf früheren Stufen bekannt geworden sein. Nun — *Kamblys* „Arithmetik und Algebra" ist seit dem Erscheinen jener Lehrpläne noch gar nicht neu aufgelegt worden; bei *Holzmüller* kommt das Wort Funktion in dem Sinne der Abhängigkeit einer Variabeln von einer oder mehreren anderen Variabeln, wie z. B. bei

*) I. in 37. Auflage, Breslau (Hirt) 1899, II. in 130.—133. Auflage, ebenda 1904. Die Teile III und IV des Buches kommen für die hier betrachteten sechs Unterklassen nicht in Frage.

**) 4. Auflage, Leipzig (Teubner) 1904.
⁰) 2., 3. Auflage, Leipzig (Teubner) 1902, 1905.
} Die Teile II kommen beidemal für unsere sechs unteren Klassen nicht in Betracht. Sie sind übrigens zurzeit noch nicht in den entsprechenden Neuauflagen erschienen.

⁰⁰) Leipzig (Teubner) 1906. Der *Müller*sche Artikel füllt in dem Buch die Seiten 429—487.

einer graphischen Darstellung, ebenfalls überhaupt nicht vor; bei *H. Müller* — ich meine zunächst die Auflage seines Buches von 1902 — auf einer einzigen Seite! Ich habe also vorderhand nur von *H. Müller* zu sprechen. In dem zitierten Teile seines „Unterrichtswerks" liest man auf Seite 115: „Ein arithmetischer Ausdruck, in dessen Bestandteilen veränderliche Größen vorkommen, wird als Funktion dieser Größen bezeichnet. Für bestimmte Werte der Veränderlichen nehmen auch die Funktionen bestimmte Werte an." Dies wird an ein paar Beispielen durch eine Tabelle erläutert. Darauf heißt es: „Die Behauptung, daß eine Funktion einen bestimmten Wert oder mit einer zweiten Funktion den gleichen Wert hat, wird Gleichung genannt" — und damit geht es dann in die Lehre von den Gleichungen hinein, die in gewöhnlicher Weise (ohne Benutzung der graphischen Interpretation für den Funktionsbegriff!) traktiert wird. In der neuen Auflage von 1905 sagt *H. Müller* allerdings in zwei, dem alten Texte eingefügten Anmerkungen einiges von der eventuellen graphischen Darstellung bei Gleichungen ersten Grades. Eine organische Einarbeitung des Wesentlichen kann ich indes nicht darin erblicken. Auch werden quadratische Gleichungen und Logarithmen weiterhin ganz wie früher ohne Funktionsbegriff und graphische Darstellung behandelt.

So steht es also mit einigen der meistgebrauchten Schulbücher, und mit den übrigen ist es schwerlich viel anders. Eine Ausnahme macht wohl nur die reichhaltige Aufgabensammlung von *A. Schülke**), in der bereits für die Unterstufe sehr mannigfache Übungen in graphischer Darstellung angesetzt sind**). Freilich wird diese Sammlung zurzeit noch nirgendwo im Schulunterricht Preußens gebraucht⁰). Ich werde also zusammenfassend sagen dürfen: Der Funktionsbegriff ist in den allgemeinen Unterrichtsbetrieb der betrachteten

*) *A. Schülke,* Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, Geometrie und Physik, I. Teil, Leipzig (Teubner) 1906; als II. Teil hierzu gilt vorderhand: *A. Schülke,* Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre, Leipzig (Teubner) 1902.

**) In jüngster Zeit erschien noch: *F. Pietzker,* Lehrgang der Elementar-Mathematik, in zwei Stufen, Teil I, Lehrgang der Unterstufe, Leipzig (Teubner) 1906. Der Verfasser, Mitglied der Breslauer Unterrichtskommission, spricht sich im Vorwort selbstverständlich lebhaft für die Durchdringung des Lehrstoffs mit dem Funktionsbegriff aus; doch kommt es in der weiteren Ausführung des Textes nur anhangsweise zur Geltung.

⁰) Nach dem amtlichen „Verzeichnis der an den höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher", herausgegeben von *E. Horn,* 2. Ausgabe, Leipzig (Teubner) 1906.

sechs Klassen bislang noch gar nicht prinzipiell aufgenommen. Wenn von gewisser Seite jetzt der modernen Bewegung jegliche Neuheit in diesem Punkt abgestritten wird, warum hat man dann nicht schon längst die Lehrbücher entsprechend jenem Hinweis der amtlichen methodischen Bemerkungen abgeändert? —

Für die Ausbildung der Lehrer — um kurz auch von dieser etwas zu sagen — gibt die offiziellen Vorschriften die Prüfungsordnung von 1898*). Sie finden dort auf Seite 13 f. angegeben, was von den Kandidaten zu fordern ist, welche die Lehrbefähigung in der Mathematik nachweisen wollen. Insbesondere werden daselbst für die „zweite Stufe", d. h. wenn der Kandidat die Lehrbefähigung für die sechs untersten Klassen erwerben will, folgende Kenntnisse in „reiner Mathematik" verlangt: „Elementarmathematik" gründlich, Bekanntschaft mit der analytischen Geometrie der Ebene, die Differential- und Integralrechnung in ihren Hauptzügen. Es mag hier ein wenig auffallen, daß die Differential- und Integralrechnung auch für die Kandidaten verbindlich ist, die nur die Lehrbefähigung für die zweite Stufe nachweisen wollen, — da doch selbst auf den Oberklassen der höheren Schulen diese Disziplinen nicht unterrichtet werden. Hat man hier zum Ausdruck bringen wollen, daß dieser Lehrstoff unbedingt den Kernpunkt jeder modernen mathematischen Bildung darstellt? Ich stimme einer solchen Auffassung ja durchaus zu. Aber es drängt sich uns die weitere Frage auf: Wenn einmal anerkanntermaßen die Differential- und Integralrechnung eine so allgemeine Bedeutung hat und auf der Universität neben der analytischen Geometrie das α und ω des Unterrichtsbetriebes ausmacht, warum ist sie wohl von den höheren Schulen ausgeschlossen? Ist sie sogar in ihren Anfängen so viel schwieriger, als die kifflichen geometrischen Konstruktionsaufgaben, als das apollonische Problem, als die kardanische Formel, als die zahllosen trigonometrischen Relationen? Oder müssen wir diese Scheidung vielmehr historisch begreifen?

Nun, meine Herren, ich wollte Sie hier nur einmal auf solche Gedankengänge geführt haben. Wir rühren damit an vielumstrittene Fragen, die auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts heute wohl die wichtigsten sind. Ich meinerseits nehme dabei, wie ich in der Einleitung [Seite 5] schon andeutete und wie ich Ihnen später ausführlicher darlegen werde, entschieden den Standpunkt ein, daß die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung in den Unterricht der höheren Schulen hineingehören. Nur soviel möchte ich hier in diesem Zusammenhang bemerken: Wenn der Schulunterricht in dem

*) Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Lehramts in Preußen, von 1898, Halle (Waisenhaus) 1903.

befürworteten Sinne umgestaltet wird, dann erst hat das seinen rechten Sinn, was schon gegenwärtig in der preußischen Lehramtsprüfung von den Kandidaten, welche die mathematische Lehrbefähigung der zweiten Stufe erwerben wollen, gefordert wird. Diese haben sich dann in der Tat diejenigen Kenntnisse an der Universität zu erwerben, die ihnen zu einem tieferen Verständnis für ihre spätere Unterrichtsmaterie und zu einem rechten Überblick darüber dienen; sie lernen eben den Betrieb der Oberstufe noch gehörig verstehen. Und das scheint mir geradezu ein Postulat für jegliche Lehrerbildungsfrage zu sein: Der Lehrer einer bestimmten Unterrichtsstufe muß, um wirklich über seinem Stoff zu stehen, gerade noch den Betrieb der nächst höheren Stufe gründlich mitstudieren. —

Jetzt aber möchte ich zu einer Kritik des Lehrplans der höheren Schulen, soweit wir ihn bisher betrachtet haben, übergehen. Den Hauptgesichtspunkt, unter den wir diese Kritik stellen, können wir den „methodischen Bemerkungen" der Lehrpläne entnehmen, wo es Seite 57 heißt: „Für die höheren Lehranstalten besteht die wichtigste Aufgabe des mathematischen Unterrichts in einer Schulung des Geistes, welche den Schüler befähigt, die erworbenen Anschauungen und Kenntnisse in selbständiger Arbeit richtig anzuwenden." Ich möchte hier einerseits die Worte „Schulung des Geistes" unterstreichen, welche auf den formal bildenden Wert der Mathematik hinweisen, und andererseits die Worte „in selbständiger Arbeit anwenden", mit denen eine gewisse Utilität der Kenntnisse gefordert wird. Wir sehen: weder die einseitig formale, noch die bloß utilitarische Bildung wird zum Prinzip des mathematischen Unterrichtes gemacht; sondern gerade in der richtigen Verschmelzung beider besteht das anzustrebende Ideal.

Interessant und lehrreich ist hier ein flüchtiger Rückblick in die Vergangenheit, der uns zeigt, wie die Zielbestimmung des Mathematikunterrichts zwischen den beiden eben angedeuteten Extremen hin und her geschwankt hat*). Im 17., 18. Jahrhundert hat die Utilität die Vorherrschaft; man treibt Mathematik, denn sie verspricht direkten Nutzen für die Praxis des Lebens. Das 19. Jahrhundert dagegen steht unter dem Zeichen der formalen Bildung; die Mathe-

*) Ich beziehe mich dabei auf meine Darstellung in dem Aufsatze „Der Unterricht in der Mathematik" in dem Werke von *W. Lexis:* Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen, Halle (Waisenhaus) 1902, Seite 254—264. Der Aufsatz ist abgedruckt in dem früher [Seite 5] zitierten Ferienkurs-Sammelbande von 1904, sowie im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 13 (1904), Seite 347—356, unter dem Titel: Hundert Jahre mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen Preußens. — Weiter unten kommen wir übrigens im Abschnitt IV auf das Historische ausführlicher zurück.

matik soll nur zu einer allgemeinen Schulung der geistigen Fähigkeiten dienen, wobei es auf die Übermittelung praktischer Kenntnisse nicht ankommt, so daß es im letzten Grunde überhaupt gleichgültig ist, was man im besonderen lernt. Dabei werden, je weiter die Entwicklung fortschreitet, die Anwendungen immer mehr in den Hintergrund geschoben. Was wir heute anstreben, ist kurzgesagt die Mittellinie zwischen jenen beiden Extremen, deren ausschließliche Verfolgung von uns als nicht zeitgemäß empfunden wird. Wir wollen den *formal bildenden Wert der Mathematik* durchaus gebührend würdigen, wollen zugleich aber den Lehrstoff so auswählen, daß gerade seine Erlernung für das Leben auch nützlich ist. Dabei soll Nützlichkeit nicht im Sinne jener platten Utilität verstanden werden, welche jeden Gedanken verwirft, der sich nicht gleich in bare Münze umsetzen läßt, sondern jene *geläuterte Utilität* ist gemeint, die auf die überlegenen Aspekte einer vielseitigen Bildung abzielt. Es liegt darin enthalten, daß der mathematische Unterricht keinesfalls die Verhältnisse der Wirklichkeit außer acht lassen darf, daß er vielmehr von einem allgemeinen Interesse für die Anwendungen beherrscht sein muß. Denn wenn ein junger Mann, der eine höhere Schule absolviert hat, nachher in den einfachsten Fällen, wo mathematische Betrachtungen im Leben zur Verwendung kommen, kein Verständnis zeigt, das ist (und das Entsprechende gilt in allen übrigen Fächern) ein ebenso bedauernswertes wie unhaltbares Resultat. —

Sprechen wir nun zunächst einmal von dem *propädeutischen Geometriekurs*, der auf Quarta (bzw. an der Oberrealschule auf Quinta) dem eigentlichen Lehrgang voraufgeht. Er soll den Schüler vorweg im räumlichen und ebenen Anschauen sowie im Zeichnen von Figuren und im Messen üben. Ein solcher Vorbereitungskurs wird jetzt wohl in allen Ländern gegeben, auch da, wo man weiterhin nach dem überlieferten euklidischen Aufbau unterrichtet. Die Wichtigkeit leuchtet ja auch ein: daß man vor allem erst die Figuren benennen und in der Anschauung erfassen lernen muß, ehe man sich gewisse Sätze über sie einprägen soll. Hierzu dient in erster Linie das wirkliche Konstruieren der Figuren, also das Zeichnen. Nicht minder wichtig als das Zeichnen von Figuren scheint mir jedoch das Messen zu sein. Der Schüler sollte nicht nur lernen, mit dem Lineal und dem Zirkel zu operieren, sondern sollte ebenso gut auch die Fertigkeit erlangen, mit Längenmaßen und Winkelmaßen umzugehen. Solche Übungen wären einerseits auf dem Zeichenpapier vorzunehmen, andererseits aber müßte man auch mit den Schülern hinausgehen auf den Schulhof oder einmal aufs Feld, um dort einfache Messungen mit den einfachsten Instrumenten auszuführen. Etwas Ähnliches geschieht bisweilen im

Geographieunterricht auf den unteren Klassen, doch gerade in der geometrischen Propädeutik würde es vielleicht noch größere Bedeutung gewinnen.

Man geht z. B. an einen Fluß und will die Entfernung eines jenseitigen Objektes A feststellen. Man markiert auf dem diesseitigen Ufer zwei Punkte B und C, mißt mit Band oder Latte ihren Abstand und darauf die beiden Winkel, welche die Visierlinien BA und CA mit der Basis BC bilden. Hernach läßt man das Ergebnis dieser Messungen in einem passenden Maßstabe auf Papier zeichnen und impliziert damit eine ganze Lehre der ähnlichen Dreiecke, ohne daß man doch lange von dem Begriff und den Sätzen über ähnliche Dreiecke gesprochen hat. Wenn der Schüler später in dem Lehrgebäude der Geometrie dahin gelangt, so wird ihm der Hinweis förderlich sein, daß er diese Sätze naiv schon damals angewendet hat. Natürlich ist unbedingt notwendig, daß dieser ganze Unterricht in den Händen eines Mathematikers liegt. Wollte man ihn dem Zeichenlehrer übergeben, so würde vermutlich immer die Fertigkeit, mit den Instrumenten sauber zu zeichnen, einseitig bevorzugt werden, und der Wert des Unterrichts als einer wirklichen Propädeutik zum späteren Geometrieunterricht ginge verloren.

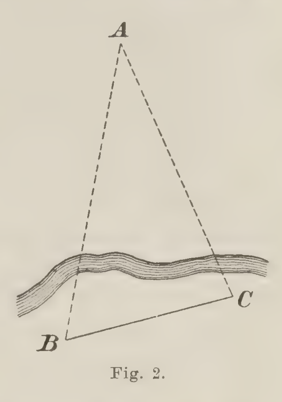


Fig. 2.

Sie finden mancherlei Interessantes darüber, was man in einem solchen Vorkurse zu bieten vermag, beispielsweise in einer Note von *M. Simon:* Über den einleitenden geometrischen Unterricht auf Quarta*). Sodann will ich Sie besonders auf zwei Leitfäden hinweisen: *E. Wienecke,* Der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung“**); *G. Holzmüller,* Vorbereitende Einführung in die Raumlehre**). Allerdings wird hier neben dem Anfertigen von Modellen und dem Zeichnen mehr nur das Messen auf dem Papier betont, weniger, worauf ich gerade Gewicht legen möchte, das Messen an natürlichen Gegenständen. Dies letztere finden Sie jedoch in einer Programmschrift von *G. Degenhardt* eingehend behandelt, des Titels: Praktische Geometrie auf dem Gymnasium⁰). Das Neue bei den Reformvorschlägen der Breslauer Unterrichts-

*) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **13** (1904), Seite 276—283.

**) Leipzig (Teubner) 1904.

⁰) Schulprogramm 1896, Nr. 395 (Frankfurt am Main, Kaiser-Friedrich-Gymnasium).

kommission dürfte nur sein, daß wir jenen Kurs in Meßübungen nicht erst später, etwa in Verbindung mit dem trigonometrischen Unterricht, sondern gerade innerhalb der propädeutischen Geometrie befürworten. Insbesondere aber möchten wir diesen Unterricht selbst über den Umfang hinaus, der im amtlichen Lehrplan vorgeschrieben ist, ausgedehnt sehen. Bisher soll er am Gymnasium nur einen Teil des Quartapensums ausmachen, wo denn vielleicht sogar die Gefahr naheliegt, daß der Lehrer in Eile über ihn hinweggeht, um zu der „eigentlichen“ Aufgabe, dem Lehrgang der Dreieckssätze, zu kommen. Ich meine, der besagte Kurs könnte schon auf Sexta oder doch mindestens Quinta beginnen, indem das Rechnen dort einen Teil seiner Stunden abgibt; erst dann wird dieser Unterricht seine volle Ergiebigkeit entfalten können*).

In unserer Betonung auch der praktischen Fertigkeiten stellen wir uns hier in prinzipiellen Gegensatz zu einer weit verbreiteten Ansicht, die zumal an der Universität mehr als einen Vertreter findet. Es wird da gesagt, nur das Begreifen der Dinge sei das Notwendige, die „äußerlichen“ Fertigkeiten brauche man nicht zu üben; denn wenn man nur die Idee begriffen habe, so könne man sich jederzeit, „wenn man es einmal brauchen sollte“, ja einarbeiten. Nun, und wie es dann geht, — das sehen Sie z. B. an den Leuten, die nie ordentlich zeichnen gelernt haben und es darum geflissentlich vermeiden, eine mathematische Entwicklung durch eine Figur zu begleiten. Ich weise Sie nur auf die bekannte physiologische Tatsache hin, daß allein die Teile des menschlichen Organismus funktionstüchtig sind, die rechtzeitig und hinreichend geübt werden. Unser Schul- und Universitätsunterricht sieht manchmal in der Tat so aus, als käme es nur auf die Ausbildung einzelner kortikaler Partieen des Gehirns an, und man dürfe alle übrigen Teile des Nervensystems als untergeordnet vernachlässigen. Nein, meine Herren, eine allseitige Ausbildung des nervösen Apparats muß angestrebt werden, und darum soll man gerade auch die äußeren Fertigkeiten nicht verachten. Das Zeichnen und Messen erfordert zu geeigneter Zeit eine ebensolche Sorgfalt bei der Einübung, als die Gewöhnung an diese oder jene neue Idee des Lehrgebäudes. Alles dies gilt insbesondere für den Lehrer. Man muß mit einem Instrument, wie dem Lineal oder dem Zirkel, selber viel hantiert haben, damit man lehren kann, es zu gebrauchen. Anderenfalls erlebt man Dinge, wie ich sie einmal

*) Von Herrn Direktor *P. Treutlein* erfahre ich, daß sich an seinem Realgymnasium mit Gymnasialabteilung zu Karlsruhe in der Tat eine ausgedehnte geometrische Anschauungslehre von Quinta beginnend seit längerem bewährt hat. Man vergleiche einen Jahresbericht dieser Anstalt, etwa: Schulprogramm 1905, Nr. 775.

in einem humanistischen Gymnasium gesehen habe: Die Schüler sollten den Zirkel aus dem Zirkelkasten herausnehmen, und sie brachen sich die Fingernägel dabei ab, — warum? weil sie nicht wußten und der Lehrer wohl ebensowenig, daß man nur auf den Gelenkknopf zu drücken braucht, damit der Zirkel herausspringt.

Aber noch ein weiteres möchte ich dem propädeutischen Kurs als eine Pflicht anvertrauen, das sind Übungen im abschätzenden Messen und im Vorstellen von Maßgrößen! Können Sie sich sofort ein klares Bild eines Gebäudes von 30 m Front machen? Nur wenige sind in solchen Vorstellungen geübt. Wie groß ist ein Feld von 25 ha? Ein Winkel von 1′, von 1″*)? Solche Fragen können Sie sich auf dem Spaziergang viele stellen, und Sie werden, wenn Sie die Angaben Ihrer Schätzung hinterher genauer prüfen, wahrscheinlich nicht allzuoft mit sich zufrieden sein dürfen. Schon auf der Schule müßte diese Fähigkeit, Maßgrößen zu schätzen, geübt werden, was sich hernach auf den mannigfachsten Gebieten menschlicher Tätigkeit als nützlich erweisen wird. Gerade die geometrische Propädeutik ist nach meiner Überzeugung die geeignete Stelle, um dafür die Grundlagen zu gewinnen. —

Ich komme sodann zum Rechenunterrichte der drei untersten Klassen, der sozusagen eine Propädeutik zu dem darauffolgenden Arithmetikunterricht darstellt. Hier muß ich noch einmal auf die fatale Diskontinuität hinweisen, die sehr häufig zwischen Rechnen und Arithmetik besteht. Wie wir schon bemerkten [Seite 16], wird das in der Hauptsache durch den Wechsel der Lehrkräfte veranlaßt, indem jene Rechenstunden meist mit Quarta aus den Händen der Elementarlehrer in die der akademisch gebildeten Lehrer übergehen. Ich will keinem von beiden eine größere Schuld zuschieben. Bald wird es der eine an dem Hinarbeiten auf ein tieferes Verständnis fehlen lassen, bald mag der andere versäumen, an die früher entwickelten Verfahren anzuknüpfen. Auch in den methodischen Bemerkungen der geltenden Lehrpläne wird bereits ausdrücklich auf diesen mißlichen Punkt aufmerksam gemacht. Ich kann hier, meine Herren, ebenfalls nichts weiter tun, als Ihnen die Notwendigkeit einer Verständigung mit Ihren späteren Kollegen recht eindringlich vorzustellen. Denn daran liegt alles, wenn eine natürliche und fruchtbare Entwicklung des Buchstabenrechnens aus dem numerischen Rechnen heraus erzielt werden soll.

Ein ebenso bedauerlicher Mißstand ist, wie ich zur Orientierung gleich anschließend bemerke, die Einschnürung des Mathematikunterrichts in den Gymnasialtertien auf drei Wochenstunden,

*) Einen brauchbaren Anhalt gibt, daß der Durchmesser des Vollmondes im Mittel etwa 30′ spannt.

die durch das dortige Einsetzen des Griechischen (mit sechs Stunden) verursacht erscheint. Die Klage darüber ist allgemein. Denn gerade da, wo die Geometrie energischer fortschreitet und zum eigentlichen Beweisverfahren hinführt, wo daneben in der Arithmetik das Buchstabenrechnen beginnt, ist mit drei Stunden gar zu wenig zu machen. Die Aufteilung dieser Zeit in zwei Fächer läßt oft das eine dabei zu kurz kommen. Man muß unbedingt jedem der beiden zwei Wochenstunden zuerkennen. Freilich stößt eine solche Stundenveränderung bei den Vertretern anderer Fächer alsbald auf beträchtlichen Widerstand. Aber die Bedürfnisse eines zweckdienlichen Mathematikunterrichts werden sich hier auf die Dauer nicht zurückdrängen lassen! —

Das Wichtigste für unsere Kritik des bestehenden Lehrplans ist aber endlich die Frage des Funktionsbegriffs auf der Schule, die wir nun schon mehrfach berührten. Sie erinnern sich, ich wies darauf hin [Seite 21], daß die Lehrpläne von 1901, über die früheren Bestimmungen hinaus fortschreitend, in den „methodischen Bemerkungen" den Funktionsbegriff erwähnen und betonen. Organisch eingearbeitet ist der Funktionsbegriff jedoch in diese neuen Lehrpläne keineswegs; und wie es die gangbarsten Schulbücher machen, habe ich Ihnen vorhin erst gezeigt [Seite 26f.]. Indessen ist die gewünschte Assimilation, wie auch die Meraner Reformvorschläge nachdrücklich betonen, durchaus notwendig. Ja, meine Herren, ich bin der Überzeugung, der Funktionsbegriff in geometrischer Form sollte überhaupt die Seele des mathematischen Schulunterrichts sein! Um den Funktionsbegriff gruppiert sich zwanglos der gesamte mathematische Lehrstoff und gewinnt, was bisher vielfach zu vermissen ist, einen planvollen Zusammenhang. Zudem ist seine direkte sachliche Bedeutung kaum zu überschätzen. Die graphische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten zieht sich heute ja durch sämtliche Berufszweige; sie ist die typische Form, in der uns allerorten der mathematische Gedanke entgegentritt. In den exakten Wissenschaften ist dies zur Genüge bekannt. Aber auch sonst begegnen wir überall dem xy-System mit eingetragenen Kurven. Ich denke z. B. an die Luftdruckkurven, an graphische Kurszettel. Wir können keine Zeitung mehr aufmachen, aus der uns nicht eine solche Figur entgegenspringt!

Ein lehrreiches Beispiel solcher Darstellungen bietet der graphische Eisenbahnfahrplan. Vergegenwärtigen wir uns an einem speziellen Fall, was es damit für eine Bewandtnis hat. In der nebenstehenden Figur 3 sind in einem Koordinatensystem die Zeiten von 12 Uhr mittag bis 12 Uhr mitternacht als Abszissen genommen und auf der Ordinatenachse an einem Kilometermaßstab die Stationen der Bahnstrecke Northeim-Göttingen-Münden aufgetragen. Jeder Zug, der auf dieser Strecke verkehrt, ist dann durch einen Linienzug

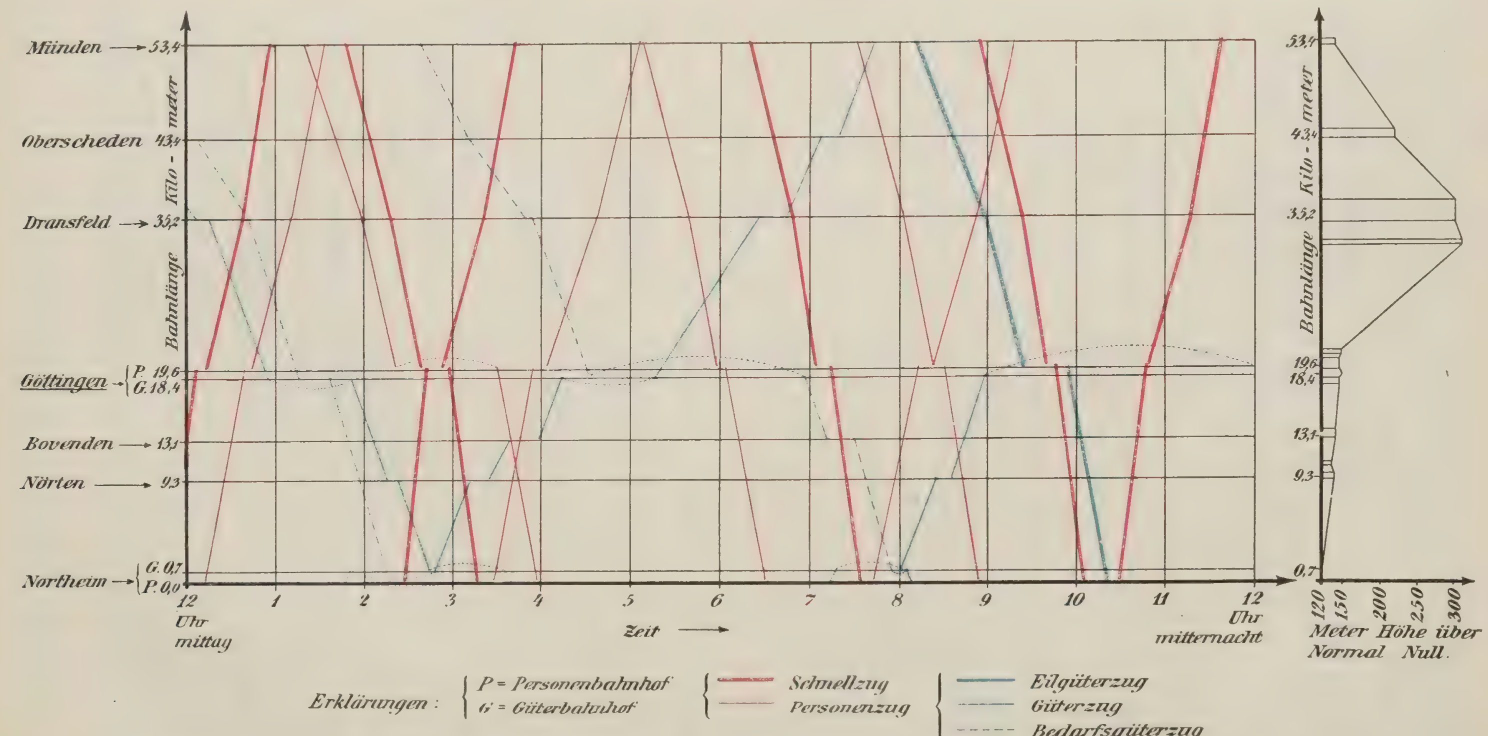


Fig. 3. Graphischer Eisenbahnfahrplan für die Strecke Northeim—Göttingen—Dransfeld—Münden; Winter 1906/07.

(Der Übersichtlichkeit wegen sind alle Züge, die nicht durchgehend auf dieser ganzen Strecke verkehren, fortgelassen; ebenso die Minutenzahlen, welche Ankunfts- und Abfahrtszeiten genau angeben.)

dargestellt. An Haltestellen haben wir jedesmal einen längeren oder kürzeren horizontalen Absatz. Die verschiedene Steilheit der Linienstücke zeigt ungleiche Fahrtgeschwindigkeiten der Züge an. Schnellzüge fahren rascher als Personenzüge, am geringsten ist die Geschwindigkeit der Güterzüge. Deutlich erkennbar ist ferner, wie alle Züge der Strecke Göttingen-Münden langsamer auf die Höhe von Dransfeld hinauf und schneller wieder hinabfahren; zur bequemen Übersicht der Steigungsverhältnisse ist an der rechten Seite der Figur ein Profil des Bahnkörpers hinzugefügt. Beachten Sie endlich: ein Zug kann einen anderen, langsamer fahrenden Zug derselben Richtung nur an einer Haltestelle des letzteren überholen. So muß der Personenzug, der 1^{20} von Münden abfährt und 2^{25} in Göttingen anlangt, hier warten, bis der ihm folgende Schnellzug vorauf ist. In derselben Weise überholt der Personenzug, der von Northeim 3^{29} abfährt, in Bovenden einen Güterzug, und so fort. (Die hier betrachtete Strecke ist zweigleisig; bei eingleisigen Strecken natürlich dürfen sich sogar zwei Züge entgegengesetzter Richtung nur an einer Haltestelle des einen begegnen.)

Man macht viele interessante Beobachtungen an einem solchen Plan. Und nun ist das Witzige: wenn wir uns etwa aus einer Fahrplantabelle eine derartige graphische Darstellung anfertigen, so machen wir damit nur rückgängig, was bei der Zentralverwaltung der Eisenbahn vorher geschah. Die erste Herstellung eines Fahrplans erfolgt immer in graphischer Form; denn nur so ist es möglich, alle die verschiedenen in Betracht kommenden Gesichtspunkte zugleich im Auge zu behalten: das Einholen von Zügen derselben Richtung, die Begegnung von Zügen entgegengesetzter Richtung, die verschiedene Geschwindigkeit von Schnellzügen, Personenzügen und Güterzügen, die Rücksicht auf Steigungen im Gelände und dergleichen. Erst hinterher werden die genauen Minutenzahlen für die Ankunfts- und Abfahrtszeiten der Züge berechnet und an die darstellenden Linien bei den Stationen darangeschrieben; so wird zur Anschaulichkeit des Graphischen die Präzision des Zahlenmäßigen hinzugefügt. Auch im inneren Dienste der Stationen werden immer diese graphischen Fahrpläne benutzt; anders ginge es gar nicht an, z. B. bei Zugverspätungen oder etwa bei Einlegung von Sonderzügen die Sicherheit des Betriebs aufrecht zu erhalten. Nur für das Publikum wird der graphische Fahrplan in Zahlentabellen umgesetzt, weil man leider glaubt, daß es sich nicht die Übung im Lesen solcher graphischen Darstellungen erwerben könnte.

Die Ausbildung des „funktionalen Denkens“, wie wir es [Seite 6] nannten, ist heute in der Tat für weite Kreise ein großes Bedürfnis. Wenn wir da durch einen zweckdienlichen und zeitgemäßen Schul-

unterricht Vorsorge treffen wollen, so müssen wir uns vor allem fragen, wo man auf der höheren Schule den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung denn heranbringen soll. Bisher scheint etwas derartiges nur gelegentlich auf Obersekunda und ausführlicher erst am Schluß der Oberprima zu geschehen, wo der Koordinatenbegriff im Lehrplan vorgeschrieben wird. Meine Herren, ich bin der Überzeugung, daß wir durchaus die ersten Beispiele von graphischer Darstellung schon nach Obertertia und Untersekunda legen müssen. Anders werden wir der wirklich fundamentalen Bedeutung dieses Gegenstandes im Schulunterrichte nicht gerecht. Die frühe Gewöhnung an funktionales Denken wird dem Schüler erst den vollen Gewinn bringen. Allerdings handelt es sich auf jenen Klassen keineswegs um eine ausführliche „Lehre“, sondern nur um die Idee einer natürlich gegebenen Zuordnung bestimmter Zahlwerte zueinander, wobei die Vorstellung der Kontinuierlichkeit gleichsam unvermerkt entsteht. Man wird dem Schüler auch nicht bange machen: „Wir kommen jetzt zu etwas ganz Neuem, was eigentlich zur höheren Mathematik gehört“. Vielmehr wird die Idee der graphischen Darstellung an einfachsten Beispielen direkt eingeübt:

$$y = 3x - 5 \quad \text{oder} \quad y = -x + 2;$$

und wenn man nach einiger Zeit noch höher gehen will:

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{x}\cdot$$

Die Gleichungen sind als einfachste Ausdrücke der Konstruktionsvorschrift ohne weiteres verständlich zu machen.

An diesen außerordentlich leicht erfaßbaren Beispielen soll dann anschließend meines Erachtens auch der Begriff der Steigung einer Kurve klar gemacht werden, und man läßt die Sekante in die Tangente übergehen, ohne vorher den Schüler durch schwierige Limesbetrachtungen oder gar Existenzfragen zu ängstigen. Natürlich ist dieser Übergang immer mittels Figuren, die der Schüler auf Koordinatenpapier selbst zeichnet, anschaulich zu gestalten, nicht etwa bloß durch Nullsetzen der Diskriminante einer quadratischen Gleichung zu vollziehen. So werden jedem Schüler ohne Zweifel schon auf dieser Stufe solche Betrachtungen ganz natürlich und zugleich überaus reizvoll erscheinen! —

Ich möchte Ihnen nun geradezu eine Tabelle angeben, wie ich mir auf Grund der entwickelten Gesichtspunkte das Stichwortschema eines Reformlehrplans für die sechs unteren Klassen etwa denke. Ich beschränke mich dabei vorderhand ganz auf das Gymnasium. Für die Realanstalten habe ich Reformvorschläge im Sinne, die ich Ihnen erst näher auseinandersetzen kann, wenn wir auch die Oberstufe betrachtet haben.

<table>
<tr><th rowspan="2">Klasse</th><th colspan="4">Gymnasium</th></tr>
<tr><th colspan="2">Arithmetik</th><th colspan="2">Geometrie</th></tr>
<tr><td>VI</td><td rowspan="3">Rechnen:
Elementares Rechnen bis zur Regeldetri und den bürgerlichen Rechnungsaufgaben.</td><td rowspan="4">Pflege des numerischen Rechnens.</td><td rowspan="2">Geometrische Propädeutik:
Messen und Zeichnen.</td><td rowspan="4">Übung der Raumbeherrschung.</td></tr>
<tr><td>V</td></tr>
<tr><td>IV</td><td rowspan="2">Planimetrie:
Geraden, Winkel, Dreiecke, Parallelogramm, Kreis.</td></tr>
<tr><td>III b</td><td>Arithmetik:
Buchstabenrechnen: die vier Spezies, lineare Gleichungen mit einer Unbekannten.</td></tr>
<tr><td>III a</td><td colspan="4" rowspan="2">Arithmetik und Geometrie verschmelzen in der zentralen Idee:
Der Funktionsbegriff in geometrischer Form.
Das rechtwinklige xy-System und die graphische Darstellung einfachster Funktionen (Koordinatenpapier), Diskussion der entstehenden Kurven nach ihrem Gesamtverlauf, ihrem Steigen und Fallen, ihrem Flächeninhalt.
Durch die Idee des Funktionalen belebt und aneinander geschlossen, die üblichen Gebiete: Potenzen und Wurzeln; lineare und quadratische Gleichungen, erste Ideen über Kegelschnitte; Kreisberechnung; Abhängigkeit der Dreiecksseiten und -winkel voneinander.
Heranziehung zahlreicher praktischer Beispiele mit fortgesetzter Übung der Raumbeherrschung und Pflege des numerischen Rechnens.</td></tr>
<tr><td>II b</td></tr>
</table>

Dazu einige allgemeine Bemerkungen.

Gegenwärtig wird für mein Gefühl der mathematische Unterricht noch zu sehr in der äußeren Trennung von Arithmetik und Geometrie geführt, und mit dieser äußeren Trennung geht oft eine innere Hand in Hand. Das Prinzip der Reinheit der Methoden, das in höheren Spezialvorlesungen an der Universität ein interessantes Ding sein mag, wird leider bisweilen auch an der Schule hochgehalten: „geometrica geometrice"; in die Geometrie nur ja keinen Zahlbegriff hineinbringen; die Algebra hat zum Glück die „Krücken der Geometrie" nicht nötig; in der Arithmetik nur ja keine Figuren! — das sind die oft gehörten Schlagworte, mit denen die allgemeine Durchbildung zur höheren Ehre der Reinheit der Methode geopfert wird. Wir brauchen über das Unpädagogische dieser Art nicht länger zu reden. Es ist unmittelbar evident, daß den höheren Schulen, deren Idealziel die Übermittlung einer Allgemeinbildung ist, vielmehr die Aufgabe zufällt, die Mathematik als einen Organismus vorzuführen, dessen Teile in reger und lebendiger Beziehung stehen.

Wenn im späteren Leben, meine Herren, irgend eine mathematische Frage an Sie herantritt — sagen wir: mit einer gewissen Dringlichkeit —, dann wird keine Muße sein, daß Sie erst fragen: Soll ich rein geometrisch verfahren, etwa gar projektiv mit Vermeidung aller metrischen Begriffe? Soll ich nach reinen Methoden der Zahlen-

theorie verfahren? Nein, vor allem ist wichtig, daß Sie auf Grund Ihres gesamten mathematischen Wissens sich überhaupt zu helfen verstehen. Und das wird in der Regel um so leichter geschehen, in je engeren Konnex die verschiedenen mathematischen Denkweisen durch den Unterricht gebracht sind. Eben darum wird es gut sein, wenn das auf den untersten Klassen in Arithmetik und Geometrie Erlernte nun in Obertertia und Untersekunda zusammenfließt und in der Erfassung des Funktionsbegriffes gipfelt. Natürlich soll dabei nicht die Geometrie der Arithmetik geopfert werden, noch soll es umgekehrt sein; keines soll den kürzeren ziehen. Durch beiderseitiges Entgegenkommen werden beide Formen des mathematischen Denkens nicht verlieren, sondern gewinnen.

Ferner: wenn wir den Funktionsbegriff schon in den Lehrplan der Unterstufe hereinbringen, so wird ein wirklich geeigneter Abschluß für die mit Untersekunda abgehenden Schüler [Seite 19f.] erreicht. Dadurch macht sich vermutlich eine kleine Verschiebung im bisherigen Lehrgang notwendig, indem die Logarithmen, wie es unser Meraner Lehrplan auch vorsieht, auf die Oberstufe zu verschieben sind. Die Logarithmen indessen gebe ich für jene Abgehenden gern um die Einführung des Funktionsbegriffes preis! Ich weiß, manche Lehrer hängen daran, bereits auf der Unterstufe die Logarithmen zu bringen, um für die arithmetische Betrachtung der Operationen dritter Stufe (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren) den Schlußstein zu gewinnen. Aber eine einwandfreie Betrachtung der Gleichungen:

$$a^b = c; \quad \sqrt[b]{c} = a; \quad {}^a\lg c = b$$

in ihrer Wechselseitigkeit involviert, darüber muß man sich klar sein, im Grunde die Ideen des Irrationalen und der Stetigkeit; und es scheint mir sehr zweifelhaft, ob diese schwierige Sache, die meines Erachtens auf der Schule überhaupt nur graphisch-anschaulich befriedigend erledigt werden kann, in solcher Art schon in Untersekunda zu machen ist. Andere vertreten auch die Ansicht, die Bedeutung der Logarithmen auf der Schule ruhe in ihrem Wert als Rechenhilfsmittel. Nun, ich meine, auf der genannten Klassenstufe kann man über eine beiläufige Benutzung derselben schwerlich hinauskommen. Was nützt es dann, wenn der Schüler, der mit der Einjährigenberechtigung abgehen will, gerade noch erfährt, daß man das im übrigen vielleicht sogar vernachlässigte numerische Rechnen unter Umständen mittels der Logarithmen abkürzen kann? Wozu holt man künstliches Gerät hervor, wenn man weiß, daß es gleich darauf doch wieder in die Ecke gestellt wird? Ganz anders ist das mit dem Funktionsbegriff. Hier handelt es sich darum, daß der Schüler

innerhalb der beiden Jahre Obertertia und Untersekunda eine Begriffsbildung vollzieht, die ihn hernach in ihrer Bedeutung das ganze Leben lang begleitet! —

Lassen Sie uns jetzt einmal den Blick ins Ausland richten, speziell auf die Verhältnisse in Frankreich, wo seit dem Mai 1902 das ganze höhere Unterrichtswesen durchgreifend neugestaltet worden ist. Frankreich, meine Herren, ist auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts mit den zeitgemäßen Reformen, die wir zurzeit bei uns in Deutschland mit Eifer befürworten, entschieden vorangegangen und hat dadurch auf die unsererseits vertretenen Tendenzen mitbestimmend eingewirkt. Die Bekanntschaft mit den dortigen Einrichtungen ist in der Tat sehr geeignet, uns in unseren Ideen zu bestärken.

Den offiziellen Ausweis über die französische Neuorganisation des Unterrichtswesens gibt der Plan d'études von 1902*) und die inzwischen gefolgten Abänderungen von 1905**), die noch einige Vermehrung der mathematischen Stunden gebracht haben. Außerdem verweise ich Sie gern auf einen Artikel von *F. Marotte:* Les récentes réformes de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire français⁰), der Ihnen eine gute Orientierung ermöglicht. Interessant wird Ihnen dann auch sein, ein Referat über die deutschen Schulen von demselben Autor zu lesen⁰⁰), das er auf Grund eigener Studienreisen verfaßt hat. Die Organisation der französischen höheren Schulen ist auf den ersten Blick nicht leicht aufzufassen, da es ein mannigfach und anders als bei uns gegliedertes System ist; die nicht immer glücklich gewählten Bezeichnungen bieten dabei einige Schwierigkeit. Ich will Ihnen nebenstehende Tabelle vorführen und sie sogleich kurz erläutern.

Man hat in Frankreich (gemäß der Neuordnung von 1902) vier Arten höherer Lehranstalten, deren Oberstufen als „sections A, B, C, D" bezeichnet werden — jedenfalls wollen wir sie so nennen, obschon es „Classe de Mathématiques, sections A et B" statt „C et D" heißt — und die paarweise einen gemeinsamen Unterbau „divisions A et B" haben. Diese verschiedenen Schularten sind im Prinzip und faktisch durchaus gleichwertig.

*) Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons (arrêtés du 31 mai 1902), Paris (Delalain) 1903.

**) Etwa einzusehen in der Zeitschrift: L'enseignement mathématique, Paris (Gauthier-Villars), 8 (1906), Seite 65—77: Modifications apportées au plan d'études etc., arrêtées des 27, 28 juillet et 8 septembre 1905.

⁰) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **13** (1904), Seite 450—456.

⁰⁰) *F. Marotte,* L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'enseignement secondaire des garçons en Allemagne, Paris (Imprimerie nationale) 1905.

	Klassen der verschiedenen Arten der französischen höheren Schulen:				Entsprechend unserer:
Premier Cycle	VI, division A		VI, div. B		Quinta V
Premier Cycle	V, div. A		V, div. B		Quarta IV
Premier Cycle	IV, div. A		IV, div. B		Untertertia IIIb
Premier Cycle	III, div. A		III, div. B		Obertertia IIIa
Second Cycle	II, section A	II, sect. B	II, sect. C	II, sect. D	Untersekunda IIb
Second Cycle	I, sect. A	I, sect. B	I, sect. C	I, sect. D	Obersekunda IIa
Second Cycle	Classe de Philosophie, sect. A	Classe de Philosophie, sect. B	Classe de Mathématiques, sect. A	Classe de Mathématiques, sect. B	Unterprima Ib

Der Charakter der vier Anstalten, oder genauer gesagt: ihrer Oberstufen, läßt sich durch folgende Stichworte angeben:

A. Latein und Griechisch.	B. Latein und neuere Sprachen.	C. „Sciences“ und Latein.	D. „Sciences“ und neuere Sprachen.

Hiernach kann man A mit unserem Gymnasium, D mit unserer Oberrealschule vergleichen, B und C zusammen würden dem Realgymnasium entsprechen. Hinsichtlich der „sciences“, d. i. Mathematik und Naturwissenschaften, haben aber einerseits A und B, andrerseits C und D die gleichen Stundenzahlen und den gleichen Lehrplan. Wir brauchen daher hier nur von einer Zweiteilung des Unterrichtswesens zu reden und werden also A und B als „sprachliche“, C und D als „realistische“ Anstalten zweckmäßig zusammenfassen. Im übrigen haben alle diese Schulen sieben Klassen, die etwa unsrer Quinta bis Unterprima entsprechen. Ich werde mich im folgenden der Namen der korrespondierenden deutschen Klassen bedienen. Auf die obersten Stufen der französischen Anstalten und auf den Übergang von ihnen zu den Hochschulen komme ich später gelegentlich zurück.

Wer sich im einzelnen die Stundenverteilung und die Lehraufgaben der verschiedenen Klassen ansehen will, mag auf den Plan d'études (insbesondere die Tabellen, Seite XXIII bis XXVI und Seite 201 bis 204 der vorhin zitierten Ausgabe) verwiesen sein. Es kommt mir hier bloß

darauf an, Ihnen zu zeigen, daß in Frankreich an den realistischen Anstalten der Funktionsbegriff in geometrischer Form genau so eingeführt wird, wie ich es vorhin empfohlen habe. Für die Obertertia wurde nach dem Plan d'études von 1902 vorgeschrieben: Die graphische Darstellung von $ax + b$, von x^2, von $\frac{1}{x}$ usw., verwoben mit der Lehre von den Gleichungen; dann für Untersekunda: Die graphische Darstellung von $\frac{ax + b}{a'x + b'}$; der Begriff der Ableitung; die geometrische Bedeutung der Ableitung, insbesondere ihres Vorzeichens — alles an ganz einfachen numerischen Beispielen. Die Neuerungen von 1905 verschieben sogar noch die Behandlung von $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ nach Obertertia. Sie sehen, meine Herren, hier wird in der Tat das Lehrziel gestellt, das ich vorhin befürwortete.

Zudem will ich Ihnen noch ans Herz legen, sich das neue Schulbuch für den arithmetischen Unterricht von *É. Borel*, Algèbre*), einmal anzuschauen, damit Sie nicht glauben, die Sache stünde vielleicht nur im Lehrplan. Sie finden darin unter anderem die früher besprochenen graphischen Eisenbahnfahrpläne. Als Ergänzung hierzu mögen Sie auch *Borel*s Géométrie**) in die Hand nehmen, ebenfalls ein Schulbuch, das nicht weniger sorgfältig gearbeitet ist; nur würde ich in der Geometrie vielleicht die Beziehung zur Arithmetik etwas mehr herausgearbeitet wünschen. Übrigens ist der Verfasser derselbe *Borel*, den Sie aus der hohen und abstrakten Mathematik kennen, — wie sich denn in Frankreich überhaupt die hervorragendsten Wissenschaftler eine Ehre daraus machen, den Schulunterricht zu beraten und dadurch beizutragen, daß er auf einem zeitgemäßen Niveau bleibt. Davon legen z. B. auch die hochinteressanten Vorträge Zeugnis ab, die im Sommer 1904 im „Musée pédagogique" über den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht gehalten worden sind⁰); ihre Lektüre will ich Ihnen ebenfalls recht empfehlen. —

Zum Abschluß dieses Kapitels noch eine Bemerkung über die Vereinigten Staaten Nordamerikas. Dort haben die Schulverhältnisse mit den unsrigen insofern eine gewisse Ähnlichkeit⁰⁰), als

*) Zwei Bändchen, Paris (A. Colin) 1903.

**) Paris (A. Colin) 1905.

⁰) Conférences du Musée pédagogique 1904: L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques par MM. *H. Poincaré*, *G. Lippmann*, *L. Poincaré*, *P. Langevin*, *É. Borel*, *F. Marotte* avec une introduction de M. *L. Liard*. Paris (Imprimerie nationale) 1904.

⁰⁰) Lehrreich ist unter anderem das Buch von *J. W. A. Young:* The teaching of mathematics in the Higher Schools of Prussia, New York (Longmans-Green) 1900, das unsere eigenen Schulverhältnisse in amerikanischer Beleuchtung zeigt.

ebenso wie bei uns, ja fast noch mehr als bei uns vielerlei Tendenzen nebeneinander Platz haben. Ich möchte Sie hier nun gern darauf hinweisen, daß in den Vereinigten Staaten anscheinend eine analoge Reformbewegung wie bei uns im Entstehen ist. Interessante Mitteilungen enthält in dieser Hinsicht eine Rede „On the foundations of Mathematics", die der führende Mathematiker *E. H. Moore*-Chicago im Dezember 1902 vor der American Mathematical Society gehalten hat*). Sie enthält in ihren ersten Teilen einen Bericht über den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft in den Grundlagen, um sich alsdann ausführlich über die Unterrichtsfragen zu verbreiten (gerade als hätten wir verabredet, uns gleichzeitig damit zu beschäftigen). Wegen mannigfacher Berührungspunkte mit unseren deutschen Verhältnissen bitte ich Sie, von dieser Rede Kenntnis zu nehmen. Sie finden dort z. B. genau wie bei uns die Tendenz zur Vereinheitlichung des Mathematikunterrichts ausgesprochen, den Wunsch, möglichst früh den Funktionsbegriff in geometrischer Form zu lehren, den Hinweis auf die großen pädagogischen Leistungen des Volksschulbetriebs usw. Auch fordert der Redner die Mitglieder der Society auf, engere Fühlung mit den Lehrern zu nehmen und mit ihnen an den Reformen zusammen zu arbeiten, gerade wie dies bei uns von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung angebahnt worden ist.

Es ist wohl möglich, daß die so bezeichneten Anregungen der *Moore*schen Rede dort drüben ohne Nachwirkung bleiben; es kann aber auch sein, daß dementsprechende Reformen des Unterrichts ziemlich schnell durchdringen werden. Nämlich Amerika unterscheidet sich in einem wichtigen Punkt von den Ländern diesseits des Ozeans: Man hat drüben nicht an der Bürde einer langen historischen Vergangenheit zu tragen! Die Tradition, wie wir sie haben, bietet gewiß zahlreiche Vorzüge; aber sie wird leicht zu einer Fessel, sobald es sich darum handelt, eine Neuerung einzuführen. Da muß man sich bescheiden, wenn man ganz allmählich an einigen besonders wichtigen Stellen bessert. In Amerika dagegen hat man unbeschränkte Freiheit des Neuschaffens — und, was dazu kommt, man hat einen hohen Glauben an die „education" und das lebhafteste allgemeine Interesse für das Lehrwesen. Wenn es sich z. B. um Gründung einer neuen Universität handelt (die größten sind dort vielfach nicht über dreißig Jahre alt), so läßt man sich aus allen Teilen der Welt Pläne kommen, prüft alles und behält, was als Bestes erscheint. Amerika ist auch da „das Land der unbegrenzten Möglichkeiten". —

*) Veröffentlicht in der Zeitschrift: Science, New-York (Macmillan), New Series **17** (1903), Seite 401—416; sowie im Bulletin of the American Mathematical Society, New-York (Macmillan) 2. Series **9** (1903), Seite 402—424.

Dritter Abschnitt.

Die Mädchenschulen und die mittleren Fachschulen.

Nach dieser kleinen Umschau im Auslande kehren wir zu unseren heimischen Verhältnissen zurück und kämen jetzt, wenn wir systematisch vorgehen wollten, zu den drei obersten Klassen der höheren Knabenschulen. Wir wollen aber lieber zunächst zwei weitere Schultypen besprechen, die wir jetzt leicht in ihrem Wesen verstehen können. Das sind 1. die Mädchenschulen, neunklassige Anstalten; ihre untersten drei Klassen entsprechen Volksschulklassen, die sechs übrigen stehen äußerlich den sechs untersten Klassen der höheren Knabenschulen parallel; die oberste Klasse, deren Besuch fakultativ ist, wird „Selekta“ genannt. 2. Die mittleren technischen und gewerblichen Fachschulen; sie setzen zumeist das Abgangszeugnis der Untersekunda einer höheren Schule voraus und schließen sich also an die vorhin betrachteten sechs Unterklassen der höheren Schulen an, um eine Spezialbildung für einen besonderen Beruf zu geben. Die beiden genannten Schularten sind natürlich etwas sehr Verschiedenes; aber sie haben doch ein Gemeinsames, das ist die geringe Ausbildung, die ihnen bisher — zumal im Mathematikunterricht — von oben aus in Deutschland zuteil wurde. Erst in den letzten Jahren beginnt es anders zu werden, und die Kritik, die wir zu üben haben, wird dem Sinne nach vielfach mit den Maßregeln übereinstimmen, die jetzt von den entscheidenden Stellen aus in die Wege geleitet werden.

Die Mädchenschulen.

Die genaueren Einrichtungen der Mädchenschulen — um von diesen zunächst zu reden — finden Sie wieder in dem *Lexis*schen Werke, Band II [zitiert Seite 19], zusammengestellt von *Gertrud Bäumer;* ich will hier daraus nur erwähnen, daß es 1903 in Preußen etwa 900 höhere Mädchenschulen mit rund 9500 Lehrkräften und 125 000 Schülerinnen gab. Den Wortlaut der amtlichen preußischen

Verfügungen über das Mädchenschulwesen, zumal der geltenden Lehrpläne von 1894 und die Vorschriften über die Ausbildung der Lehrkräfte können Sie in der Schrift einsehen: Bestimmungen über das Mädchenschulwesen, die Lehrerinnenbildung und die Lehrerinnenprüfungen in Preußen*). —

An den Mädchenschulen, meine Herren, steht es nun mit dem Unterricht in Mathematik schon äußerlich recht schlecht. Es werden für die ersten sechs Schuljahre drei Wochenstunden, für die drei letzten sogar zwei Wochenstunden für dieses Unterrichtsfach als hinreichend befunden. Und der Stoff? Rechnen bis zu den sogenannten bürgerlichen Rechnungsaufgaben und endlich ein bischen elementare Raumlehre. Algebraisches Rechnen auch in seinen Anfängen ist ausgeschlossen! Vergleichen wir dieses Niveau mit dem Lehrgange der Knabenschulen, so müssen wir sagen: Es wird weniger gelernt als in den acht Jahren der Volksschule; es wird weniger gelernt, als ein Schüler einer höheren Knabenanstalt bis Quarta absolviert!

Woher diese stiefmütterliche Behandlung der Mathematik auf den deutschen Mädchenschulen? Wenn man so fragt, dann bekommt man in der Regel zur Antwort, das weibliche Geschlecht eigne sich nicht für die Mathematik — oder etwas zarter gesagt: die Mathematik eigne sich nicht für das weibliche Geschlecht. Man beruft sich dabei auf die „allgemeine Erfahrung“ und bedenkt nicht, daß man einen circulus vitiosus begeht. Erst unterrichtet man die Frauen in der Mathematik so wenig wie möglich, und dann wundert man sich hinterher, daß ihnen das mathematische Denken fremd geblieben ist, und sagt: da sieht man's ja, daß sie dafür nicht taugen! Meine Herren, das Ausland kann uns längst belehren, daß die Frau des mathematischen Denkens, wie es an den höheren Knabenschulen entwickelt wird, ebenso fähig ist wie der Mann. In Amerika, England und Rußland ist die Zahl der Frauen, die es z. B. bis zur Beherrschung der Differentialrechnung bringen, durchaus keine geringe mehr, in Amerika geht sie in die Tausende. Die Fähigkeit zur Mathematik hat die deutsche Frau ebenso gut und den Willen dazu wird sie haben, sobald der Unterricht gehoben und mit alten Vorurteilen aufgeräumt ist!

Es ist unbedingt notwendig, daß der Unterricht in unseren Mädchenschulen nicht bloß auf Geschick im Französisch- und Englischsprechen und auf die Fähigkeit im literarisch-ästhetischen Anempfinden abzielt; auch die Schulung des konsequenten Denkens und der wertvollen Fähigkeit, klar zu beobachten, muß zu ihrem Recht

*) Berlin (Cotta) 1903.

kommen. Dazu bedarf es einerseits eines zeitgemäßen naturwissenschaftlichen Unterrichts, der nicht in totem Bücherwissen seinen Schwerpunkt hat, sondern in sicherer Sinnesauffassung und induktiver Denkweise übt, andrerseits aber und nicht zum mindesten eines genügenden Unterrichts in Mathematik; denn dieses Fach vermag wie schwerlich ein zweites zum klaren Denken und präzisen Ausdrücken des Gedachten zu erziehen.

Interessante Beiträge zur Frage der Mathematik an den Mädchenschulen enthalten mehrere kleine Abhandlungen des Direktors *Ed. Meyer* der städtischen Luisenschule in Mülheim an der Ruhr*). Der Verfasser vertritt darin die Ansicht, man sei sich in weiteren Kreisen wohl darüber einig, daß der Mathematikunterricht an den Mädchenschulen einer Steigerung bedürfe, es herrsche nur eine gewisse Ratlosigkeit darüber, an welcher Stelle man den Stoff vermehren solle. Auf eine solche Frage scheint mir nach dem bisher Gesagten die Antwort nicht schwer zu sein: Ich möchte meinen, die höheren Mädchenschulen sollten dasselbe Niveau erreichen, wie die sechs Unterklassen der höheren Schulen für Knaben; sie würden dann also nach unseren neuen Vorschlägen auf den Stufen der Obertertia und Untersekunda mit einer ersten Erfassung des Funktionsbegriffs in geometrischer Form abschließen.

Ich will indessen sofort dem naheliegenden Mißverständnis wehren, als ob ich befürwortete, auf den höheren Mädchenschulen möglichst genau den Lehrbetrieb des höheren Knabenunterrichts nachzuahmen. Solches haben sich in der Tat extreme Vertreter der modernen Frauenbewegung zum Ziel gesetzt; sie forderten die höhere Mädchenschule der Zukunft als eine genaue Kopie der bisherigen höheren Knabenschulen, und zwar der Realanstalten, wohl weil ihnen hier die Erfüllung des Wunsches aussichtsreicher erschien. Ja einzelne haben sogar den Vorschlag eingebracht, man solle auf den obersten Klassen jener zu schaffenden höheren Mädchenschulen, also auf deren „Obersekunda“, „Unterprima“ und „Oberprima“ noch erheblich mehr Mathematik einrichten, bemerken Sie: bei verschwindender Zeit für die Naturwissenschaften. Meine Herren, kaum daß man die Notwendigkeit eines gehörigen Mathematikunterrichts überall einzusehen beginnt, da muß man schon gegen eine einseitige Über-

*) **a)** „Wie kann die von den höheren Töchterschulen gewährte Bildung zeitgemäß gefördert und erweitert werden?“, Vortrag 1901, abgedruckt in der Zeitschrift „Die Mädchenschule“, Bonn (Marcus & Weber), **14** (1901), Seite 109—120. **b)** „Die Einführung der Mathematik in die höhere Mädchenschule“, in der Zeitschrift „Frauenbildung“, Leipzig (Teubner), **2** (1903), Seite 561—563. **c)** „Frauenbildung und höhere Mädchenschule“, Bericht der städtischen Luisenschule zu Mülheim an der Ruhr, Schulprogramm 1904, Nr. 179.

schätzung desselben die Stimme erheben. Ich glaube auch nicht einmal, daß hier die wirkliche Hochschätzung der Mathematik als Unterrichtsfaches die Triebfeder war; es leuchtet erkennbar die Besorgnis durch, die höhere Mädchenschule möchte doch nicht als gleichwertig angesehen werden, wenn sie nicht alles und jedes ebenso mache wie das Vorbild männlicherseits. In diesen Tendenzen erblicke ich etwas Ungesundes! Ich meine, wir müssen entschieden für eine spezifische Färbung der Anstalten eintreten, dementsprechend, daß die Unterschiede der beiden Geschlechter nun einmal nicht bloß in leidigen Äußerlichkeiten bestehen, sondern auch die geistigen Dispositionen verschiedenartige — ich sage nicht: verschiedenwertige! — sind.

Um nur ein Spezielles zu nennen: die Beispiele, die zur Belebung des Unterrichts dienen, müssen sich hier dem Ideenkreis des heranwachsenden Knaben, dort den Gedanken der Mädchenschule anschließen. Mir fällt gerade ein, wie ein Rechenbuch für den allerersten Mädchenunterricht mit der Aufgabe beginnt: „Erna hat zwei Puppen; sie bekommt zu Weihnachten noch eine; wieviel Puppen hat sie jetzt?“ Da haben Sie ein Beispiel, das im einen Falle sehr zweckmäßig ist, im andern Falle wenig Interesse finden dürfte. Auf die Behandlung der Mathematik an den Mädchenschulen mit Ausführlichkeit einzugehen, kann selbstverständlich hier nicht in meiner Absicht liegen. Ich verweise Sie aber gern auf einige neuere Aufsätze von *G. Noodt* in Berlin*), welche zu dieser Frage wohl bemerkenswerte Beiträge liefern. —

Wir kommen nun zur Frage der Lehrerinnenausbildung. Auch hier befindet sich alles im Übergangsstadium. Die heute noch bestehenden Zustände sind recht wenig befriedigend, doch stellen die Reformen, an denen man in neuester Zeit arbeitet, — ich komme sogleich darauf zurück — Besserung in Aussicht. Gegenwärtig ist es noch so, daß die jungen Mädchen, die sich dem Lehrerinnenberufe widmen wollen, einerlei ob an Volksschulen oder an höheren Mädchenschulen, sich gleich nach ihrer eigenen Schulzeit an ein sogenanntes „Lehrerinnenseminar“ begeben. Nach dreijährigem Besuch dieser Anstalten, deren es etwa 100 in Preußen gibt, ist ein abschließendes Examen, die „Lehrerinnenprüfung“ abzulegen, deren Reglement im

*) **a)** Wie ist auf höheren Mädchenschulen das Interesse für den mathematischen Unterricht zu wecken?“, Zeitschrift „Frauenbildung“ **5** (1906), Seite 255—264. **b)** „Wie lassen sich die Meraner Vorschläge über die Reform des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen für den algebraischen Unterricht an den Lyzeen verwerten?“, ebenda, Seite 303—314. **c)** „Wie lassen sich die Meraner Vorschläge . . . für den geometrischen Unterricht an den Lyzeen verwerten?“, ebenda, Seite 351—369.

wesentlichen noch vom Jahre 1874 stammt. In jenen Seminaren wird nun, wie sich schon in ihrem Namen ausspricht, in ähnlicher Weise wie an den Volksschullehrerseminaren ein pädagogisch-enzyklopädischer Unterricht erteilt — nur daß vielleicht noch mehr als dort auf dem Vielwissen der Nachdruck liegt.

Dieser Seminarbesuch stellt nämlich an den Fleiß und die Ausdauer der jungen Mädchen sehr hohe Anforderungen, denen leider die körperliche Leistungsfähigkeit nicht immer gewachsen ist. Andrerseits scheint aber der Verzicht auf eine tiefergehende wissenschaftliche Ausbildung dort manchmal merkwürdige Früchte zu zeitigen. Es soll vorgekommen sein, daß geprüfte Lehrerinnen von gewöhnlichen Feld- und Wiesenblumen zwar die Zahl der Staubgefäße und *Linné*sche Klasse und Ordnung auswendig wußten, aber die Pflanzen in der Natur überhaupt nicht kannten! Wenn es so steht, meine Herren, wie mag es wohl mit dem Verständnis in mathematischen Dingen sein, das erreicht wird?

Mit der erwähnten Lehrerinnenprüfung war vor zwölf Jahren noch die Ausbildung der Lehrerinnen überhaupt beendet. Neuere Verhältnisse setzten erst mit 1894 ein, wo der Gedanke zum Durchbruch kam, für die Lehrerinnen der höheren Klassen der Mädchenschulen besondere weitergehende Kurse einzurichten. Sie können sich darüber bequem in dem von zahlreichen Oberlehrerinnen herausgegebenen Buch informieren: Die Fortbildung der Lehrerin*).

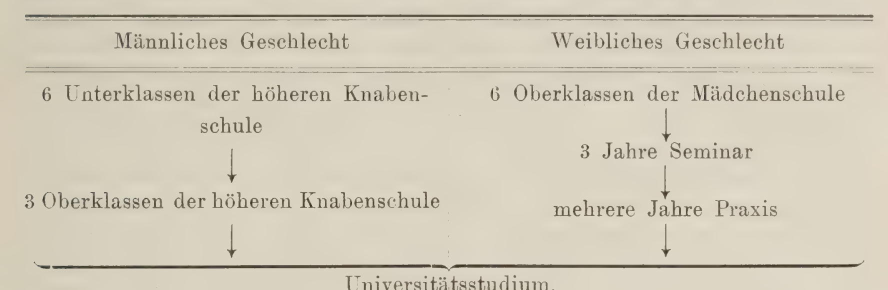
Die Ausbildung zur „Oberlehrerin“ baut sich vorderhand noch auf die bestehende Einrichtung der Lehrerinnenseminare auf. Nach absolvierter Prüfung muß die Lehrerin zuerst mindestens zwei Jahre im Schulunterricht praktisch tätig gewesen sein**), darauf hat sie einen etwa dreijährigen „Oberlehrerinnenkurs“ mitzumachen, und wird dann zu der „wissenschaftlichen Prüfung der Lehrerinnen“, der Oberlehrerinnenprüfung, zugelassen. Solche Kurse sind in Preußen bisher zu Berlin, Bonn, Breslau, Göttingen, Kiel, Königsberg und Münster eingerichtet worden, in loserer oder engerer Verbindung mit der Universität. Was bei unseren Göttinger Kursen die Mathematik betrifft, so kommen dafür in erster Linie die dafür besonders gehaltenen Vorträge von Herrn Dr. *E. Götting*, Professor am hiesigen Gymnasium, in Betracht; daneben werden von den Damen auch unsere mathematischen Anfangsvorlesungen an der Universität besucht. Das mathematische Lehrziel dieser Kurse ist dasselbe wie für die männlichen Kandi-

*) Leipzig (Teubner) 1906.

**) Die Prüfungsordnung von 1900 verlangt zwar, daß die Bewerberin „mindestens fünf Jahre nach Erlangung der lehramtlichen Befähigung im Lehrberuf gestanden hat“; man legt dies aber jetzt in dem oben angegebenen Sinne aus.

daten des höheren Lehramts, welche die Lehrbefähigung für die „zweite Stufe“ (d. h. für die sechs unteren Klassen der höheren Schulen) erwerben wollen.

Lassen Sie uns die so ganz verschiedenartige Ausbildung der männlichen und der weiblichen Kandidaten, die den gemeinsamen Vorlesungen auf der Universität vorangeht, noch einmal in einer Tabelle vergleichen:



Bedenken Sie hierzu: Das mathematische Niveau beim Abschluß der höheren Mädchenschule ist dem der sechs Unterklassen der höheren Knabenschule schon keineswegs gleich; die drei Jahre Seminar bieten für die drei Oberklassen der höheren Knabenschule erst recht kein Äquivalent, da dort nur auf der Vielseitigkeit, nicht auf dem Vertiefen in irgend einer Richtung der Nachdruck liegt. Endlich kommen für die pädagogische Ausbildung, welche die männlichen Kandidaten des höheren Lehramts erst *nach* der Universitätszeit erhalten, noch die Jahre der Praxis hinzu; und diese Jahre haben zwar für das Heranreifen der Persönlichkeit viel Bedeutung, aber offenbar wird man durch eine anstrengende Berufstätigkeit *des eigenen Lernens entwöhnt*. Lernen muß man vor allem, wenn man jung ist, solange das Gehirn noch Plastizität besitzt, später macht das Lernen die zehnfachen Schwierigkeiten!

Von da aus, meine Herren, verstehen Sie, warum unseren deutschen Damen das mathematische Studium zum großen Teil so außerordentlich schwer wird. Beiläufig gesagt: den Volksschullehrern würde es, wenn sie die gewünschte Zulassung zur Universität erreichten, in diesem Punkt aus denselben Gründen genau so gehen. Der Gang der Vorbildung ist eben durchaus ungeeignet. Wir müssen entschieden die jetzt noch herrschenden Verhältnisse der Oberlehrerinnenausbildung — nicht bloß was Mathematik angeht, sondern allgemein — als sehr unvollkommen bezeichnen und können sie nur als ein *Übergangsstadium* gelten lassen. —

Neue Aussichten eröffneten sich nun damit, daß die sogenannten „*Mädchengymnasien*“ seit Ende der neunziger Jahre in größerer

Zahl entstanden. Zurzeit (1906) gibt es solche Anstalten in Preußen zu Aachen, Berlin, Berlin-Schöneberg, Bonn, Breslau, Charlottenburg, Danzig, Elberfeld, Erfurt, Essen, Frankfurt am Main, Hannover, Kassel, Köln, Königsberg und Magdeburg. Diese Mädchengymnasien beabsichtigen für die gegenwärtigen höheren Mädchenschulen einen Oberbau zu liefern, der dasselbe Niveau wie die neunklassigen höheren Knabenschulen erreicht. Sie haben aber in der Regel nicht bloß drei Klassen, sondern setzen schon etwas früher ein, als die gewöhnlichen Mädchenschulen aufhören. Die Anstalt in Hannover hat z. B. (gemäß der Bezeichnung der höheren Knabenschulen) die Klassen Obertertia bis Oberprima. Damit wird dem schon erwähnten Umstande Rechnung getragen, daß die gewöhnlichen Mädchenschulen nicht als Äquivalent für die Klassen Sexta bis Untersekunda der höheren Knabenschulen gelten können.

Man könnte die Anstalten eigentlich besser „Mädchenrealgymnasien“ nennen; den ursprünglichen Gymnasialtypus (Latein und Griechisch) hat man nämlich alsbald fast überall wieder fallen lassen, seitdem die Realgymnasien im Prinzip für gleichberechtigt erklärt wurden, und hat eben den Realgymnasialtypus (Latein, aber kein Griechisch) akzeptiert. Dabei ist der Mathematik in Hannover z. B., um die Versäumnisse der Mädchenschule wettzumachen, ein mäßiges Plus an Stundenzahl gegenüber dem Knabenrealgymnasium eingeräumt worden, wie folgendes Schema zeigt:

Mathematik	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia
„Mädchengymnasium“ in Hannover	6	6	6	5	5
Preußische Knabenrealgymnasien	5	5	5	5	5

Es wird dann in Obertertia noch einmal mit den Elementen der Planimetrie und Algebra angefangen, und beim Abschluß in Oberprima wird das Niveau der Oberprima der höheren Knabenschulen erreicht.

Hinsichtlich der Ausbildung der Oberlehrerinnen war der Gedanke wohl der, daß die Absolvierung eines Mädchengymnasiums sofort die Zulassung zu den Oberlehrerinnenkursen bzw. zum Universitätsstudium, und in der Folge zur Oberlehrerinnenprüfung in sich schließen und daß die Ausbildung eben auf diesem kürzeren und geeigneteren Wege geschehen solle. Für die weggefallenen praktischen Ausbildungsjahre wäre vermutlich ein passender Ersatz nach der Prüfung geschaffen worden. Diese Dinge waren noch nicht zur Regelung gekommen, da sind wir in die neueste Phase der Entwicklung getreten, die auf eine Reform des gesamten Mädchenbildungswesens hinausläuft.

Im Februar dieses Jahres (1906) berief die preußische Unterrichtsverwaltung zahlreiche an der Frage interessierte Männer und Frauen zu einer Konferenz in Berlin zusammen, auf der über jene Reformfragen beraten wurde. Und neben der Tätigkeit der Regierung hat längst eine lebhafte öffentliche Diskussion eingesetzt. Der Kern der in Aussicht genommenen Reform war dieser: Die allgemeine höhere Mädchenschule soll eine neun- oder zehnklassige Anstalt sein, deren sechs bzw. sieben obere Klassen äußerlich und innerlich den sechs Unterklassen der höheren Knabenschulen ganz parallel stehen; sie werden „Lyzeen“ heißen. Über diesen Lyzeen sollen sich dann die „Oberlyzeen“ erheben — ein dreiklassiger, den drei oberen Klassen der höheren Knabenschulen entsprechender Oberbau für die Minderzahl der jungen Mädchen, die nach Bestehen des Abituriums zum Universitätsstudium übergehen und eventuell den Oberlehrerinnenberuf ergreifen wollen. Solche Oberlyzeen werden voraussichtlich in eben den verschiedenen Typen wie die bestehenden höheren Knabenschulen eingerichtet werden: gymnasiale, realgymnasiale und oberrealschulartige Anstalten. Indes wird noch darüber gestritten, ob sie auf das einheitlich abgeschlossene Lyzeum als Oberbau aufgesetzt oder etwa schon in der Mitte des Lyzeums von diesem abgezweigt werden sollen.

Von uns aus, meine Herren, wird bei dieser ganzen Reform, die mit erfreulicher Lebhaftigkeit betrieben wird, darauf zu dringen sein, daß nun ein gebührlicher Unterricht sowohl in Mathematik als in den Naturwissenschaften, den man schon allzulange vermißt hat, den höheren Mädchenschulen der Zukunft gesichert wird. In Ansehung dessen hat sich denn auch die Breslauer Unterrichtskommission eingehend mit dieser Frage beschäftigt und in neuester Zeit ihren Standpunkt in dem „Stuttgarter Bericht“ [zitiert Seite 6] dargelegt. Ich will hier nur kurz soviel erwähnen, daß nach Ansicht der Kommission — und es ist auch ganz meine eigene Überzeugung — an den Oberlyzeen für die genannten Fächer unbeschadet einer spezifischen Färbung dasselbe Zeitmaß erforderlich ist und dieselbe Stoffumgrenzung zu gelten hat wie auf der Oberstufe der höheren Knabenschulen, von der wir alsbald sprechen werden. Für die Lyzeen andererseits scheint, weil sie für den größten Teil der weiblichen Jugend die abschließende Schulbildung zu liefern haben, das Maß gefordert werden zu müssen, das für die sechsklassigen Knabenrealschulen angesetzt ist. Das Genauere mögen sie selbst in der angeführten Schrift nachlesen.

Übrigens finden Sie in dem Stuttgarter Bericht auch eine Bemerkung über die neue Mädchenschulreform von 1905 in Baden*), deren Tendenzen mit den von der Breslauer Kommission vertretenen

*) Verordnungsblatt des Großherzoglichen Oberschulrats (Karlsruhe) **1905**, Seite 295—305.

vielfach übereinstimmen. Sind dort auch die Stundenzahlen für Mathematik und Naturwissenschaften nicht sehr reich bemessen, jedenfalls beansprucht diese tatsächliche Einführung eines solchen Reformlehrplans unser volles Interesse.

Die mittleren Fachschulen.

Wir gehen nunmehr zu der in Aussicht gestellten Besprechung der mittleren (oder höheren) technischen und gewerblichen Fachschulen über, in deren Kategorie wir die Handelsschulen, Baugewerkschulen, Seefahrtschulen, Maschinenbauschulen, Technika, landwirtschaftliche Akademieen rechnen und dergleichen mehr. Diese Anstalten, welche in der Regel die Absolvierung der Untersekunda einer höheren Schule voraussetzen, verlangen entschieden unsere Beachtung, da der Mathematikunterricht an ihnen, wie ich schon andeutete, vielfach sehr reformbedürftig erscheint. Die Hauptgesichtspunkte für eine solche Reform sind, abgesehen von der wesentlich utilitarischen Färbung, dieselben wie für die höheren Schulen; die Rücksicht auf die Pflege der Raumanschauung und des numerischen Rechnens, die Rücksicht auf die Erziehung zum funktionalen Denken, die Ablehnung eines reinen Formalismus, all das gilt ohne Zweifel ebenso für die Fachschulen. Überdies aber beanspruchen diese Anstalten besonders durch ihre Lehrerfrage unser volles Interesse, weil sie für die mathematischen Fächer zum nicht geringen Teil akademisch gebildete Lehrer verwenden. Ist doch gerade von Göttingen aus mancher Mathematiker in eine solche Berufsstellung eingetreten.

Der Überblick über die verschiedenen Arten von Fachschulen wird durch ihre große Mannigfaltigkeit sehr erschwert. Es besteht durchaus keine einheitliche Organisation; eine gemeinsame Oberbehörde ist nicht vorhanden. Einige dieser Anstalten in Preußen unterstehen dem Handelsministerium, andere dem landwirtschaftlichen Ministerium; wieder andere werden von Städten unterhalten; dann gibt es auch Privatschulen in großer Zahl und so fort. Aber wir dürfen uns auch in keiner Weise auf Preußen beschränken, denn gerade die besuchtesten Anstalten bestehen, weil in Preußen die Entwicklung lange Zeit nicht in Fluß kam, in den kleinen deutschen Staaten. Eine Zusammenstellung aller dieser Institute Deutschlands ist zum ersten Male 1903 in dem früher [Seite 11] zitierten Werk von *Lexis* gemacht worden; es ist der Band IV 3, der von dem „mittleren und niederen Fachunterricht“ handelt*). Hier von all den verschiedenen Fachschulen im einzelnen zu sprechen, ist schlechter-

*) Band IV 3: Der mittlere und niedere Fachunterricht im Deutschen Reich, herausgegeben von *W. Lexis*, Berlin (Asher) 1904.

dings unmöglich: ich werde nur ein paar Beispiele herausgreifen, die unsere Aufmerksamkeit besonders auf sich ziehen.

Lassen Sie mich Ihnen zunächst von der Seefahrtschule in Bremen etwas erzählen, die in alten guten Beziehungen zu unserer Universität steht. An dieser Anstalt erfährt der höhere Stand der Seefahrer seine abschließende wissenschaftliche Ausbildung. Der Unterricht zerfällt in zwei zeitlich getrennte Abschnitte, von denen der erste die Ausbildung zum Steuermann (Schiffsoffizier), der zweite die zum Schiffer „auf großer Fahrt“*) (Kapitän der Handelsmarine) bezweckt. Der Eintritt in die Steuermannsklasse setzt eine 45monatige Seefahrzeit als praktische Vorbildung voraus; die Zulassung zur zweiten Prüfung erfolgt nach mindestens 24monatiger Seefahrzeit als Schiffsoffizier. Das Alter der jungen Leute beim ersten Eintritt liegt zwischen 19 und 23 Jahren; eine bestimmte Art der Schulvorbildung wird nicht verlangt, sodaß ein sehr mannigfaches Schülermaterial zusammenkommt.

Eine besondere Art der Vorbereitung erhalten die Aspiranten der Offiziersstellen des Norddeutschen Lloyd auf den beiden „Kadettenschulschiffen“, die sich der Norddeutsche Lloyd seit 1901 eigens zu dem Zwecke hält**). Auf ein solches Kadettenschulschiff kommt der Jüngling, nachdem er die höhere Schule mit dem Einjährigenzeugnis oder auch mit Primareife verlassen hat, und macht nun drei Jahre lang größere Seefahrten mit; da geht es nach Japan, oder nach Australien, nach der Westküste Südamerikas, nach San Francisco und anderen Orten. Auf diesen Fahrten, die gleichzeitig einem kommerziellen Zwecke dienen, damit die jungen Leute von vornherein auch in derartige Verhältnisse Einblick gewinnen, wird nun eine dem späteren Beruf genau angepaßte Vorbildung gegeben. Sie besteht in einer engen Verbindung von Praxis und Theorie; der Schüler wird z. B. in Mathematik unterrichtet, und zugleich in einen großen Teil der praktischen Nautik, der Seefahrtskunde, eingeweiht. Um die ganze Bedeutung dieser Kunst, sich auf See zu orientieren, zur Geltung zu bringen, werden als solche Schulschiffe Segelschiffe genommen, die ja in viel höherem Maße als Dampfschiffe von Wind und Wetter auf See abhängig sind. Nach Erfüllung der 45monatigen Fahrzeit tritt der Kadett dann in den seiner Vorbildung angepaßten Sonderkursus der Steuermannsklasse an der Seefahrtschule. Besteht er die Prüfung, so wird er vierter Offizier an Bord der Dampfer des Lloyd, um nach der weiteren Fahrzeit von 24 Monaten zum Abschluß seiner theoretischen Ausbildung in die regelmäßige Schifferklasse einzutreten.

*) Die „große Fahrt“ ist die Ozeanfahrt im Gegensatz zur Küstenschiffahrt.

**) Man vergleiche die kleine Broschüre „Die Kadettenschulschiffe des Norddeutschen Lloyd“, Bremen (Hauschild) 1907.

Was muß nun in der kurzen Schulzeit der Seefahrtschule an Mathematik alles gelernt bzw. gefestigt werden? Darüber gibt uns das Lehrbuch des verstorbenen Direktors der Bremer Anstalt Auskunft: *A. Breusing*, Steuermannskunst, in 7. Auflage von dem jetzigen Direktor *C. Schilling* bearbeitet*). Die Anordnung des Stoffs vermag uns ein völliges Bild vom Lehrgang zu geben; ich zähle auf:

1. Wiederholung der elementaren Algebra und Planimetrie (I—III).
2. Ausführliche Trigonometrie (IV—V).
3. Die eigentliche Lehre von der Steuermannskunst und die astronomische Ortsbestimmung auf See (VI—VIII).
4. Die Lehre von den Instrumenten, insbesondere vom Schiffskompaß (IX—X).

Vom Teil 1 will ich bemerken, daß nach meiner Überzeugung auch für den vorliegenden Zweck durch frühe Einarbeitung des Funktionsbegriffs der Aufbau des Lehrgangs gewinnen würde. In dem Teil 2 wird nicht nur die ebene, sondern auch die sphärische Trigonometrie ausführlich traktiert, die dann im Abschnitt 3 ihre weitgehende Anwendung findet. Der Teil 4 bildet ein ganz besonders wichtiges Kapitel der Nautik und stellt an das mathematisch-physikalische Verständnis schon ziemlich beträchtliche Anforderungen. Beim Kompaß speziell handelt es sich, — theoretisch zu reden — um die Betrachtung des magnetischen Potentials der störenden Eisenmassen, die sich auf dem Schiff befinden. Die Lehre von der Kompensation hat zum Gegenstand, in der *Taylor*schen Entwicklung dieses Potentials die Glieder erster und zweiter Ordnung durch Anbringung geeigneter Magnete und weicher Eisenmassen am Kompaß wegzuschaffen. Ein anderes interessantes mathematisches Problem, mit dem sich ebenfalls unter anderen *Lord Kelvin* in hervorragender Weise beschäftigt hat, bietet die Konstruktion der Kompaßrose, weil hier die heterogensten Forderungen zu erfüllen sind: möglichst kleines Gewicht, großes Trägheitsmoment und große magnetische Richtkraft**). — Übrigens tritt zu den angeführten Unterrichtsgegenständen in beiden Klassen der Seefahrtschule noch umfangreiche Behandlung der elementaren Physik, in der Schifferklasse die Grundlagen der Schiffbaukunde, der Maschinenkunde und der Meteorologie — alles Fächer, bei denen mathematische und physikalische Kenntnisse gefordert werden. —

*) Leipzig (Heinsius) 1904.

**) Ich möchte Sie auch noch aufmerksam machen, daß wir in Göttingen dank der Freigebigkeit des Norddeutschen Lloyd die beiden Haupttypen der auf den Schnelldampfern gebräuchlichen Schiffskompasse sowie alle die anderen zur Ortsbestimmung auf See gebrauchten Instrumente besitzen; sie befinden sich in der geodätischen Sammlung, jetzt im Institut für angewandte Mathematik (Prinzenstraße 21), dessen Leitung Herrn Professor *C. Runge* untersteht.

Nach diesen Bemerkungen über den mathematischen Unterricht an einer Seefahrtschule müssen wir nun wieder die Frage nach der Ausbildung der Lehrer für solche Anstalten aufwerfen. Damit kommen wir zu einem Problem, das überhaupt für alle Fachschulen in gleicher Weise besteht: Der Mathematiklehrer soll einerseits die Mathematik beherrschen und soll andrerseits auch das Milieu des betreffenden Faches, auf das die Anstalt vorbereitet, genau kennen; welche Vorbildung muß man dazu von dem Lehrer verlangen? Nun, ich will Ihnen einmal kurz sagen, wie man seither mit den akademisch gebildeten Lehrern in Bremen verfährt. Man schickt die sich bewerbenden Lehramtskandidaten, nachdem sie das Staatsexamen und das Doktorexamen absolviert und damit ihre theoretisch-mathematischen Studien beendet haben, drei Jahre auf ein Schulschiff; dort eignen sie sich unter dem Zwang der Verhältnisse das nötige Wissen der Nautik an und können dann an der Seefahrtschule angestellt werden — übrigens für einen Mathematiker, der nach der praktischen Seite Interesse besitzt, eine treffliche Laufbahn, da zudem jene Stellen ausgezeichnet dotiert sind.

So ist die Ausbildung der mathematischen Lehrer für die Seefahrtschule in Bremen, und ähnlich in den übrigen Hansastädten. Dagegen ist es auf den preußischen und den mecklenburgischen „Navigationsschulen“ z. B. anders. Dort pflegt man geeignete Praktiker als Lehrer unseres Faches zu berufen, etwa Kapitäne, die sich aus eigener Neigung, so gut es anging, in die für die Schule erforderliche Mathematik eingearbeitet haben. Sie sehen hier eine Lösung des vorhin formulierten Problems, die zu dem in Bremen üblichen Verfahren in konträrem Gegensatz steht. Es ist klar, meine Herren, daß wir in unserem Kreise hier von vornherein Partei in dieser Frage sind. Wir haben natürlich Interesse daran, daß dem wissenschaftlich ausgebildeten Mathematiker Lehrerstellungen, wie sie hier genannt wurden, offen gehalten bleiben. Aber ich meine allerdings, daß hiermit unter den heute vorliegenden Verhältnissen auch ganz objektiv die beste Lösung dieser Lehrerausbildungsfrage gegeben ist. Denn die genauere Kenntnis der Praxis dürfte da immer noch leichter nachgeholt werden können als die genauere Kenntnis der Theorie. Ein recht ersprießlicher mathematischer Unterricht erfordert meiner Ansicht nach unbedingt einen Lehrer von weiterem wissenschaftlichen Blick, als er bei einem autodidaktischen Praktiker meist zu finden sein dürfte.

Ich denke, es wird mancher unter Ihnen sein, der seiner mehr praktischen Veranlagung entsprechend, sich am Schluß seiner Studien gern für den Lehrerberuf der Fachschulen entscheidet, welche Art der Fachschule es auch sei. Erfordernis ist natürlich, daß Sie während Ihrer Studienzeit Ihr Interesse gerade auch der angewandten Mathe-

matik zugekehrt, vielleicht überdies zeitweise an einer technischen Hochschule studiert haben; und in dieser Beziehung kann ich Sie nur bitten, doch im weitesten Kreise Ihrer Kommilitonen aufklärend und anspornend zu wirken. Es tritt gar oft der Mißstand zutage, daß die jüngeren Semester sich viel zu eng an das Vorbild einer älteren Generation anlehnen und sich dadurch nicht selten gegen neuzeitliche Errungenschaften verschließen! Die angewandte Mathematik bietet heutzutage dem Mathematikstudierenden in der Tat die mannigfachsten Aussichten für spätere Berufe; und von diesen ist der Lehrerberuf der Fachschulen gewiß nicht der schlechteste. Bietet er doch schon in pädagogischer Beziehung eine ungemein reiche Anregung, insofern es hier besonders darauf ankommt, mit eigener Kraft etwas Individuelles zu gestalten. Der Lehrer an einer Fachschule muß sich ja überall an die konkretesten Vorstellungen anschließen, die seinen Schülern von ihrer speziellen praktischen Tätigkeit her bereits vertraut sind. Den Maschinenbauschüler wird man ganz anders mathematisch unterrichten müssen als den angehenden Seefahrer, den künftigen Landwirt wieder ganz anders als den Maschinenbauschüler. Sie sehen, meine Herren, es zeigt sich das Problem einer von Fall zu Fall verschiedenen individuellen Ausgestaltung des Unterrichts. Und dabei gibt es keine in jahrzehntelangem Betriebe festerprobten Vorbilder.

Interessante Erfahrungen hat in der bezeichneten Richtung der französische Mathematiker *J. Andrade* gesammelt; er wirkt an der mit der Universität zu Besançon verbundenen Uhrmacherschule und unterrichtet dort die „Ingenieurmathematik". Ich verweise Sie auf seinen vor zwei Jahren (1904) in Heidelberg gehaltenen Vortrag*) und will daraus hier nur eine amüsante Bemerkung anführen: Die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung, an geeigneten Problemen anschaulich behandelt, sind — so berichtet *Andrade* — seinen Uhrmachern durchaus kein Hindernis im Studium, sogar die Integrationsmethode der sukzessiven Approximationen, in passender Form vorgebracht, wird noch assimiliert. Nur jeden abstrakten Buchstabenkalkul muß er überall vermeiden; zwei allgemeine Gleichungen ersten Grades aufzulösen, verursacht den Schülern größere Schwierigkeiten, als das Phänomen der Synchronisation zu verstehen. —

Wir wenden uns nun zu einer zweiten, nicht minder wichtigen Spezies des Fachunterrichtswesens, die der Ausbildung unserer Landmesser (Feldmesser, Geometer) dient. Die Vorbedingung für das Betreten dieser Laufbahn bildet das Einjährigenzeugnis oder auch die

*) Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Leipzig (Teubner) 1905, Seite 622—626: L'Enseignement scientifique aux écoles professionelles et les „Mathématiques de l'ingénieur".

Primareife. Zuerst sind dann ein oder zwei Jahre praktischer Tätigkeit zu absolvieren, und darauf bezieht der angehende Landmesser für zwei oder drei Jahre die Akademie. In Norddeutschland dienen für dieses Studium die landwirtschaftliche Hochschule zu Berlin und die landwirtschaftliche Akademie zu Poppelsdorf bei Bonn, deren jede etwa 200 bis 300 solche Kandidaten zur Zeit heranbildet.

Was das Quantum Mathematik betrifft, das von diesen Studierenden zu bewältigen ist, so besteht es der Hauptsache nach aus einer sehr ausführlichen Trigonometrie und Polygonometrie. Dabei fällt uns aber besonders die starke Betonung der Rechenschemata auf. Und dies ist in der Tat für den Landmesser — wie überhaupt für den, der praktisch viel zu rechnen hat — ein außerordentlich wichtiger Punkt. Da geht es nicht, daß man auf irgend ein Zettelchen schief und unordentlich ein paar Zeilen flüchtig hinwirft, sondern es muß alles sauber und peinlich geordnet in einem festen Schema niedergeschrieben sein, damit die Rechnung jederzeit von einem selber und von anderen durchgesehen und kontrolliert werden kann. Derartige Schemata finden Sie in großer Zahl und mit gerühmter Sorgfalt in dem Buch von *F. G. Gauß**), das man die Bibel des Landmessers nennen könnte: Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst**).

Ist hiernach deutlich, worauf beim mathematischen Unterricht der angehenden Feldmesser der Nachdruck liegen muß, so bliebe noch zu erörtern, in welcher Weise man dort unterrichten soll. Soll man beim Unterrichte der Landmesser dogmatisch vorgehen und die Schemata einfach ohne innere Erklärung mechanisch einüben, oder soll man sie genetisch entstehen lassen und ausführlich begründen? In dieser Hinsicht ist mir vor einiger Zeit eine Erfahrung mitgeteilt worden, die einen nachdenklich stimmt. Nachdem man jahrelang an einer Anstalt nach der letztgenannten Methode doziert hatte, mit geringem Erfolg, versuchte man es dann mit der dogmatischen Methode; — aber die soll sich, wie man mir sagte, „ebensowenig bewährt haben!“ Gewiß, meine Herren, leicht ist es nicht, an einer solchen Akademie einen wirklich erfolgreichen mathematischen Unterricht zu erteilen. Im wesentlichen liegt das wohl darin begründet, daß die Studierenden durch die vorhergehenden Jahre der Praxis — und wenn es auch in diesem Falle nur zwei sind — sich an ein ausschließlich konkretes Denken gewöhnt haben und wenig Freude finden an den abstrakten Ideenfolgen, die sich nun einmal in der Mathematik doch nicht ganz umgehen lassen.

*) der übrigens mit unserem großen *C. F. Gauß*, mit dem er Namen und das Interesse an der Geodäsie gemein hat, nicht zu verwechseln ist.

**) 2. Auflage, Halle (Strien) 1893.

Ein allgemeines Rezept für den Unterricht kann ich Ihnen natürlich nicht geben; ich will Sie nur auf die besonderen hier vorliegenden Schwierigkeiten hingewiesen haben. Da ist es eben Aufgabe des Lehrers, bei gleichmäßiger Beherrschung von Praxis und Theorie ein gut Maß pädagogischen Geschicks zu zeigen. —

Eine dritte, wohl die wichtigste Art von Fachschulen, die wir hier besprechen wollen, sind die „mittleren" und „höheren" Technika. Die ersteren knüpfen unmittelbar an die Volksschulbildung an und dienen zur Ausbildung der sogenannten Werkmeister in den Fabriken; die letzteren, mit denen wir uns im folgenden allein beschäftigen wollen, setzen das Einjährigenzeugnis als erlangt voraus und liefern die Menge der mittleren Techniker, welche ja in unserem großen industriellen Betriebe eine wichtige Rolle spielen. Wie schon angedeutet [Seite 52], ist in dem umfangreichen *Lexis*schen Werke, auf das wir uns fortgesetzt beziehen, zum ersten Mal versucht worden, eine umfassende Übersicht über jene Anstalten in Deutschland zu geben. Es war dies besonders mühevoll, eben weil sich der Staat, zumal der preußische Staat in früheren Jahren nur wenig dieser Anstalten annahm. Infolgedessen hat sich in größtem Umfange die private Initiative der Sache bemächtigt, und es ist geradezu eine Art Geschäft geworden, in allen möglichen Städtchen derartige „höhere" Technika einzurichten, eventuell mit Unterstützung der Gemeinden, die ja an einer solchen Gründung aus finanziellen Überlegungen Interesse haben. Es wird genügen, wenn wir die rein äußerliche Tatsache feststellen, daß diese Privatschulen in Norddeutschland, einen schönen großen Kranz um Berlin herum bildend, in lauter kleineren Städten der Kleinstaaten ihren Sitz haben. Hier ein paar Beispiele: Friedberg (in Hessen), Hildburghausen (in Sachsen-Meiningen), Sulza und Ilmenau (in Sachsen-Weimar), Frankenhausen (in Schwarzburg-Sondershausen), Altenburg (in Sachsen-Altenburg), Köthen (in Anhalt), Strelitz (in Mecklenburg-Strelitz), Neustadt (in Mecklenburg-Schwerin).

Von den hier genannten und anderen Techniken hat gewiß manche Anstalt Gutes geleistet, aber dieses Privatschulwesen hat doch auch seine großen Übelstände gezeitigt. In der Ingenieurzeitschrift hat vor etlichen Jahren *F. Ruppert*-Chemnitz einen sehr lesenswerten Aufsatz*) veröffentlicht, in welchem er die Zustände an jenen Anstalten ausführlich darzulegen unternimmt. Er tadelt vor allem die berühmte Schnelldressur, mit der einige dieser Anstalten ihren Schülern den gesamten notwendigen Lehrstoff übermitteln und zwar jede Anstalt

*) Vergleichende Zusammenstellung aus den Programmen von 17 deutschen technischen Fachschulen, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Berlin (Springer), **41** (1897), Seite 1060—1068.

natürlich in viel kürzerer Zeit als ihre Konkurrentinnen, wie es in der Reklame heißt*). Besonders interessant ist das gelegentlich angewandte „Schnellanfertigungsverfahren“ der Zeichenbogen für darstellende Geometrie. Da der Schüler nach Absolvierung der Anstalt doch eine größere Zahl selbstgezeichneter Bogen vorlegen muß, wenn anders die Fernerstehenden den Besuch der Anstalt als erfolgreich ansehen sollen, so hilft man dem armen Studierenden ein bischen nach: man gibt ihm Zeichenpapier, auf dem die Linien schon gestrichelt angegeben sind; der Schüler hat sie nur sorgfältig nachzuziehen und — braucht dann gewiß weniger Zeit, als wenn er die Sache auch noch verstehen oder gar selbst erfinden sollte! Aber „selbstangefertigt“ hat er die Zeichnungen doch! — Eine wichtige Rolle spielt bei dem Technikumswesen auch die Idee des akademischen Lebens. Daß das Farbentragen der Universitätsstudenten nachgeahmt werden muß, brauche ich kaum zu erwähnen; die Prospekte versäumen natürlich nicht, auf diesen wichtigen Punkt hinzuweisen, und zwar entweder in positivem oder in negativem Sinn, jenachdem man sich an die späteren Schüler oder an die Eltern wendet. Ja, gelegentlich sucht man die Hochschulen noch in der akademischen Freiheit zu überbieten. In dieser Hinsicht lieferte seinerzeit Strelitz das Nonplusultra. Wozu eine Semestereinteilung? Wozu eine Festlegung der Ferien? Der Schüler hat das doch zu bestimmen! Und so wurde es in der Tat eingerichtet, wenn man dem Prospekt glauben darf. Der Schüler konnte eintreten, wann er wollte, — jeden Tag des Jahres, — konnte regelmäßig oder unregelmäßig kommen, stets fand er Anleitung, sich in dem vorgeschriebenen Schema eine Nummer weiterzubringen, bis er auf diesem Wege endlich sein schönes Programm absolviert hatte.

In diesem argen Mißwesen ist eine Wendung zum Besseren fühlbar geworden, seitdem sich der Staat mehr um die Sache bemüht. Immerhin bedarf es noch einer großen reformatorischen Arbeit, um wirklich mit solchen Schäden, wie wir sie eben charakterisierten, endgiltig aufzuräumen. Über den neueren Stand der Dinge orientiert ein kürzlich erschienener Aufsatz von *A. Lippmann,* ebenfalls

---

*) Das Reklamewesen steht überhaupt bei diesen Anstalten recht in Blüte. Auf einem heute noch geltenden Prospekt findet sich z. B. oben die Abbildung eines großen, stattlichen Gebäudes; man soll offenbar den Eindruck gewinnen, daß dieses das Anstaltsgebäude sei. Wenn man aber genauer zusieht, so erkennt man, daß ganz winzig darunter steht: „projektiert!“ Es ist natürlich schon seit mehreren Jahren „projektiert“. Auch bei den Frequenzangaben der Prospekte muß man vorsichtig sein; es wird bisweilen eine Zahl angegeben, die man „Jahresfrequenz“ nennt — es ist einfach die Summe von Sommer- und Winterfrequenz — und dergleichen mehr.

in der Ingenieurzeitschrift*). Ich denke, diese Frage der Reform der Technika wird Sie lebhaft interessieren. Ein erster Schritt zu ihrer gedeihlichen Lösung ist durch die Gründung einer Reihe von staatlichen Anstalten und durch den Erlaß offizieller Bestimmungen (1901) bereits getan. Nach *Lexis* (IV 3, Seite 55) waren 1903 in Preußen 19 derartige, vom Staate unterhaltene und beaufsichtigte höhere Technika vorhanden, die zusammen etwa 3000 Schüler ausbildeten. Solche Anstalten bestehen z. B. in Dortmund, Hagen in Westfalen, Köln; in Elberfeld ist eine glänzend eingerichtete Anstalt gerade dazu gekommen; für Berlin wird eben eine neue projektiert. Sodann aber müssen wir der vortrefflichen kgl. sächsischen Anstalt in Chemnitz gedenken. Auch die Privatanstalt zu Mittweida im Königreich Sachsen, die von etwa 1200 Schülern besucht wird, scheint Tüchtiges zu leisten und oberhalb des gewöhnlichen Niveaus der privaten Institute zu stehen. —

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den staatlichen Techniken Preußens — um nur von diesen zu reden — ist gar nicht unbeträchtlich. Die Stundenverteilung geht aus folgender Tabelle (Lexis IV 3, Seite 52) hervor:

Zahl der Wochenstunden	Klasse: IV	III	II	I
Mathematik	8	4	4	4
Darstellende Geometrie	6	4	—	—
Theoretische Mechanik	4	—	—	—
Physik	4	2	—	—

Ein besonderer Nachdruck wird auf die Mathematik gelegt durch die acht Stunden in der Unterklasse, und diese sind in der Tat sehr nützlich, da zu dem Eintritt in die Unterklasse wieder nicht nur das Einjährigenzeugnis, sondern auch noch der Ausweis über zwei Jahre praktischer Tätigkeit erforderlich sind, in denen viel mathematische Kenntnisse vergessen werden. Es darf übrigens nicht befremden, wenn in obiger Tabelle nach rechts, also nach den oberen Klassen hin viele Striche eintreten. Dies erklärt sich einfach so, daß auf den höheren Klassen der Unterricht einen mehr spezifischen Charakter annimmt; statt der darstellenden Geometrie setzt Maschinenzeichnen ein, die Physik geht in Elektrotechnik über, usw.

Was nun den Lehrstoff angeht, der an den staatlichen Techniken in Mathematik unterrichtet wird, so weist derselbe naturgemäß enge Verwandtschaft mit dem der technischen Hochschulen auf. Da ist

*) Betrachtungen über technische Mittelschulen mit besonderer Berücksichtigung der Privatanstalten (Techniken), Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure **48** (1904), Seite 1494—1498, 1575—1580.

zunächst die darstellende Geometrie, die im Unterrichte des angehenden Maschinentechnikers mit Recht einen breiten Raum einnimmt. Das Zweitafelsystem bildet ja in der späteren Praxis geradezu das täglich gebrauchte Handwerkszeug. Daher findet das Zeichnen in Grund- und Aufriß wie überhaupt die graphischen Methoden in der Technik und im technischen Unterricht eine viel eingehendere Pflege, als es irgendwo an den Universitäten geschieht. Und was damit Hand in Hand geht: Man legt größten Wert auf die Entwicklung der Raumvorstellung, die überall zum Begreifen analytischer Tatsachen als Hülfsinstrument benutzt wird.

In dieser Weise werden ganze Disziplinen mit graphischen Methoden durchsetzt. Ein wichtiges Beispiel dafür bietet die technische Mechanik. In der graphischen Statik werden die Kräfte durch Strecken dargestellt, die gegebenen als Strecken gegeben, die gesuchten als Strecken gesucht, und nun an irgendwelchen vorgelegten materiellen Raumgebilden (wie Brückenbogen, Fachwerk) die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte geometrisch studiert. Ähnlich werden in der graphischen Dynamik die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Kräfte durch Strecken dargestellt, und so mit ihnen „gerechnet". Dabei kommt die graphische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten fortgesetzt zur Verwendung. Man läßt den Indikator einer Kraftmaschine das Diagramm aufzeichnen, das den Dampfdruck p im Zylinder als Funktion des variablen Volumens v darstellt [Fig. 4], und hat dann in dem Flächeninhalte der entstehenden geschlossenen Kurve die Arbeit

$$\int_{\circlearrowleft} p\,dv,$$

die während der Periode des Vorgangs geleistet wird. Endlich beansprucht auch die Kinematik im technischen Unterricht ihre ausführliche Berücksichtigung, und auch das wieder vielfach in graphischer Form*). Der angehende Ingenieur muß z. B. wissen, auf welche Art die Profile von Zahnrädern konstruiert werden, und

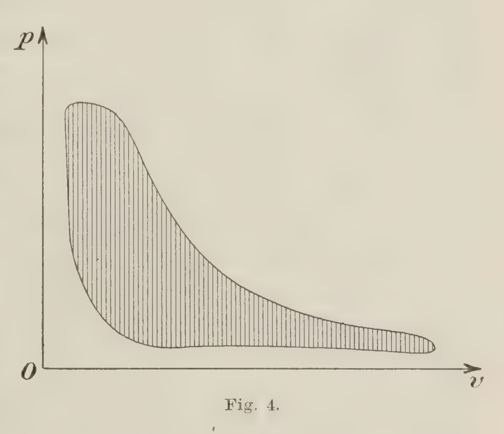


Fig. 4.

*) Ich meine hier nicht die Kinematik *Reuleaux*scher Richtung, die sich ausschließlich in formal-geometrischen Bahnen bewegte, sondern die Kinematik, in der die Mechanismen nach ihren wirklichen Verhältnissen betrachtet werden, bei denen das Spiel der Kräfte, die Reibung usw. neben den rein geometrischen Beziehungen wesentlich in Betracht kommen.

was dergleichen Probleme mehr sind; sie können sich diese Dinge bequem an den von *F. Schilling* konstruierten kinematischen Modellen*) unserer mathematischen Sammlung klarmachen.

Ein weiteres Charakteristikum des gesamten technischen Unterrichtsbetriebes ist die ausgiebige Benutzung und Einübung von Näherungsmethoden. Die große Fülle der Probleme, welche die Hydraulik, welche die Festigkeitslehre usw. dem Techniker bietet, findet in den exakten Methoden der Analysis durchaus nicht das adäquate Mittel zur Lösung.**) Die Aufgaben sind vonvornherein so kompliziert, daß eine exakt mathematische Behandlung sie nicht meistern könnte. Die Praxis aber kann nicht warten, bis die Analysis hinreichend entwickelt ist; und zum Glück braucht sie es auch nicht. In der Technik kommt es auf das Genaue in der Regel gar nicht an; bei der Bestimmung einer Unbekannten will man nicht den Wert auf sehr viele Dezimalen haben, sondern nur die Größenordnung, nur ein Intervall, in dem die Unbekannte liegt. Handelt es sich um die Berechnung einer Schiffsschraubenwelle, so heißt für den Ingenieur die Frage: Wie stark muß ich die Welle herstellen, damit sie sicher nicht knickt oder bricht? und wie dünn darf ich sie wählen, damit sie nicht zu ungefüge wird und ich kein Material verschwende? Solcherlei Fragen werden natürlich immer mit Näherungsrechnungen in Angriff genommen, und dafür werden eben im technischen Unterricht in extenso die Regeln gelehrt.

Unter ganz entsprechenden Gesichtspunkten steht an denselben Anstalten die Behandlung der gesamten technischen Physik, insbesondere der Lehre von den Wärmemaschinen und die Elektrotechnik. Die Berechnung eines elektrischen Leitungssystems, die Berechnung einer Dynamomaschine von gegebener Leistungsfähigkeit sind fundamentale Aufgaben für den Techniker, denen der Universitätsstudent zumeist ratlos gegenüberstehen dürfte, — selbst dann, wenn er sich speziell mit Elektrizitätslehre befaßt hat. Gibt uns das nicht zu denken, meine Herren? Nun, ich bin der Überzeugung: was die Mehrzahl unserer studierenden Mathematiker und Naturwissenschaftler in der Jetztzeit bedarf, das ist in der Tat eine engere Fühlung mit der Praxis, eine engere Fühlung, als sie leider herkömmlich ist! Erst

*) Verlegt in Halle (M. Schilling).

**) Zu genauerer Orientierung über diese und ähnliche Gebiete empfehle ich die (allerdings noch nicht abgeschlossenen) Bände IV und V der in Leipzig (Teubner) unter den Auspizien der Akademieen von Göttingen, Leipzig, München und Wien erscheinenden „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen". Der Überblick ist dort ein viel allgemeinerer als in den üblichen Kompendien der technischen Mechanik.

die Entwicklung der letzten zehn Jahre zeigt, wie ich das später bei Besprechung der Hochschulen ausführen werde, ein Fortschreiten im Sinne dieser These. Allerdings, wer möchte sagen, daß uns diese Strömung nicht in das ebenso gefährliche andere Extrem der bloß praktischen Empirie treiben kann? Ja, meine Herren, darüber müssen wir uns klar sein: Was wir auch organisieren mögen, wir laufen immer Gefahr, in Fehler zu verfallen. Aber das Allesbedenkenwollen soll unser Handeln nicht lähmen, und Sache des Taktes ist es, den richtigen Mittelweg innezuhalten. Für die Jetztzeit, wo die gegenseitig befruchtende Verbindung zwischen Technik und Mathematik vielfach zu vermissen ist, müssen wir auf eine Annäherung der beiden Gebiete hinarbeiten*). Jedenfalls fordern wir, der Vertreter der Mathematik an technischen Lehranstalten soll das mathematische Denken nicht vernachlässigen, aber er soll sich auch durchaus in dauerndem Kontakt mit der technischen Wirklichkeit halten. —

Um Ihnen nunmehr zu zeigen, in welcher Weise man einen technisch-mathematischen Unterricht auf Grund der geschilderten allgemeinen Gesichtspunkte ausgestalten kann, möchte ich Ihnen zwei vielgenannte charakteristische Bücher anführen. Das sind: *G. Holzmüller*, Die Ingenieurmathematik in elementarer Behandlung**); und *J. Perry*, The Calculus for Engineers⁰), deutsch bearbeitet von *R. Fricke* und *F. Süchting* unter dem Titel: Höhere Analysis für Ingenieure⁰⁰).

Bei einer ersten Betrachtung dieser Bücher fällt uns auf, daß bei *Holzmüller* von vornherein starker Nachdruck auf die graphischen Methoden gelegt wird, während im Vergleich dazu bei *Perry* mehr das rechnerische Element in den Vordergrund tritt. Der eigentliche, innere Unterschied liegt aber nach einer anderen Seite, nämlich in der konträren Stellung, welche die beiden Autoren gegenüber der analytischen Geometrie und der Differential- und Integralrechnung einnehmen. Soll man die Symbole x, y, dx, dy im mathematischen Unterrichte der höheren technischen Fachschulen einführen und konsequent gebrauchen? *Holzmüller* sagt Nein; *Perry* Ja, in allererster Linie!

Holzmüller vertritt in seinem Buche den Standpunkt, daß man an den Fachschulen durchaus die Infinitesimalrechnung vermeiden müsse. Der Schüler werde durch die Schwierigkeit dieser „höheren" Betrachtungen abgeschreckt und andrerseits zu einer gedankenlosen

*) In diesem Geiste ist auch der früher schon [Seite 3] zitierte Göttinger Ferienkursband von 1900 herausgegeben.

**) 2 Teile, Leipzig (Teubner) 1897—98.

⁰) 2. edition, London (E. Arnold) 1897.

⁰⁰) Leipzig (Teubner) 1902.

Benutzung unverstandener Formeln angehalten. Nun handelt es sich aber in der Ingenieurmathematik auch bei ihm von Anbeginn immer um Aufgaben, wie: Schwerpunkte irgendwie begrenzter Figuren zu berechnen, Trägheitsmomente zu bestimmen und dergleichen, also im letzten Grunde gerade um das Integrieren. Eine begriffliche Vermeidung der Infinitesimalrechnung ist es demgemäß bei *Holzmüller* nicht und kann es nicht sein; es werden nur der Name und die Schreibweise vermieden, es wird jeder Grenzübergang am konkreten Beispiel ad hoc von neuem gemacht. Im ersten Bande seines Buches schaltet *Holzmüller* geradezu ein besonderes Kapitel ein, des Titels „Einige Hilfsmittel der elementaren Mathematik“, worin dann der Begriff des Integrals als „Schichtenformel“ figuriert. Ich meine, die Gefahr, daß der Schüler nur das mechanische Operieren mit Formeln lernt, besteht doch überall im mathematischen Unterricht. Aber soll man sich darum der außerordentlichen Vorteile begeben, die in der mathematischen Formelsprache liegen? Sollen wir uns verabreden, meine Herren, die Eisenbahn oder sonst ein modernes Verkehrsmittel niemals zu gebrauchen, weil wir dabei möglicherweise Land und Leute weniger eingehend kennen lernen?

Perry verfährt wie schon gesagt völlig anders. Bei ihm wird von vornherein das xy-System in Gestalt des „squared paper“ eingeführt und nun die Ideen der Differential- und Integralrechnung unter Beschränkung auf die allereinfachsten Funktionen entwickelt: x^n für ganzzahliges n, e^x (die „Zinseszinsfunktion“) und $\sin x$ — das ist der ganze Apparat von Funktionen, mit dem *Perry* in zwei Dritteln seines Buches operiert. Erst im letzten Drittel geht er auf einige allgemeinere Betrachtungen ein und greift dabei nach meinem Dafürhalten sogar etwas weit aus. Mit Geschick ist aber der ganze Stoff nicht systematisch entwickelt, sondern er wächst sozusagen aus der Fülle der praktischen, insbesondere der elektrotechnischen Aufgaben heraus. Stillschweigende Voraussetzung muß bei einem solchen Unterrichtsgang natürlich sein, daß die ganze Welt dieser Anwendungen dem Schüler geläufig ist. Es wird niemandem einfallen, ebenso etwa Schüler zu unterrichten, die nicht in diesen technischen Dingen ganz und gar zu Hause sind. Gleichwohl bietet das *Perry*sche Buch viele Anregung und man möchte in der Tat wünschen, daß bei uns diese ganze Art, Lehrbücher zu verfassen, mehr in Aufnahme kommen möchte.

Nach dem Gesagten ist es klar, daß ich für meine Person mehr auf die Seite von *Perry* als von *Holzmüller* neige. Man wird im einzelnen verschiedene Ansicht haben können, jedenfalls werden wir uns in folgenden Punkten einig sein, meine Herren: 1. Auf den Fachschulen soll überall konkret unterrichtet werden. Man wird die Integral-

rechnung nicht mit dem allgemeinsten Funktionsbegriff oder gar der *Dedekind*schen Definition der Irrationalzahl anfangen, sondern etwa mit Berechnung von Schwerpunkten usw.; das ist eine Einführung, die geeignet ist, den Techniker zu interessieren. 2. Die Bezeichnungen x, y, dx, dy soll man nicht vermeiden, sondern an Beispielen geschickt einführen; durch eine konkrete Behandlungsweise wird fernerhin dieses wichtige Rüstzeug gebrauchsfähig gehalten und zugleich eine bloß mechanische Benutzung verhindert. 3. Es ist Mangel an mathematischen Lehrbüchern für den Techniker, die auf wissenschaftlicher Höhe stehen, ohne doch zu abstrakt zu sein. Die Lehrbücher, die heutzutage von uns Mathematikern gebraucht werden, sind für den Techniker meist zu abstrakt geschrieben; und die Bücher, mit denen sich der Techniker bisher aushilft, sind in den grundlegenden mathematischen Fragen oftmals recht unzureichend. Erst das in neuester Zeit erschienene Buch von *G. Scheffers**) dürfte dem bisherigen Mangel abhelfen. Der Verfasser verfolgt in seiner Darstellung die jeweiligen Empfindungen des Lernenden, wie diesem das Verständnis aufgeht, mit besonderer psychologischer Feinheit, sodaß ich, obwohl mit der Ausdrucksweise bei der Besprechung des „Unendlichkleinen" nicht ganz einverstanden, doch von der großen Zweckmäßigkeit des Buches im ganzen völlig überzeugt bin. —

Ein noch weniger befriedigendes Bild als bei der verbreiteten Lehrbuchliteratur bietet sich, wenn wir nun noch einen Blick auf die Ausbildung der Mathematiklehrer für die technischen Fachschulen werfen. Für die Fachschulen im allgemeinen haben wir davon früher schon [Seite 55f.] einiges gesagt, als wir von der Bremer Seefahrtschule sprachen. Hier bei den Techniken liegen nun die Verhältnisse besonders im Argen. Die Ausbildung ihrer Mathematiklehrer schwankt zwischen zwei Extremen, von denen das eine so gefährlich ist wie das andere. Das eine ist der Spezialmathematiker, der nichts von der Technik versteht und sich auch nicht dafür interessiert; das andere ist der Techniker, dem mathematische Ideen fremd sind. Hier einzugreifen und die Einrichtungen für eine planmäßige Ausbildung dieser mathematischen und übrigens auch der naturwissenschaftlichen Lehrer der technischen Fachschulen zu treffen, erscheint für unsere technischen Hochschulen, wie ich das in meinem Aufsatz von 1905 über „Hochschulprobleme"**) angedeutet habe, zurzeit als eine hochwichtige Aufgabe. Ein erster Schritt in dieser Richtung

*) Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, Leipzig (Veit) 1905.

) Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **14 (1905), Seite 477—492; der Aufsatz ist im Anhang C des vorliegenden Buches abgedruckt.

ist bereits geschehen. Der „Unterrichtsausschuß", den der Verein Deutscher Ingenieure zur Beratung von Hochschul- und Unterrichtsfragen eingesetzt hat (ähnlich wie die Naturforscherversammlung ihre Breslauer Unterrichtskommission), hat sich in Bezugnahme mit Vertretern der technischen Mittelschulen selber energisch dafür ausgesprochen, daß die erforderlichen Einrichtungen an den technischen Hochschulen zu schaffen seien*). —

Schließen wir hiermit das Kapitel, das von den Mädchenschulen und den Fachschulen handelte, so will ich den Wunsch aussprechen, meine Herren, Sie möchten später selbst einmal — auf Grund der Anregungen, die wir Ihnen in Göttingen geben können — zu einer gesunden Entwicklung der hier berührten aktuellen Fragen Ihren Beitrag liefern! Ich bin überzeugt, daß unsere Reformbestrebungen den richtigen Weg dazu bahnen. — Lassen Sie uns jetzt kurz noch einmal zurückblicken, was wir bislang besprochen haben, damit wir die Übersicht nicht verlieren. Ich stelle eine kleine Tabelle mit Stichworten zusammen:

1. Volksschulen: Pädagogik; Gesichtskreis des täglichen Lebens.
2. Sechs Unterklassen der höheren Knabenschulen: Neuer Lehrplan mit organischer Einarbeitung der zeitgemäßen Ideen.
3. Mädchenschulen: } Heutiger Zustand ungenügend; Notwendigkeit
4. Fachschulen: } einer modernen Entwicklung.

Und nun gehen wir zu der Betrachtung der drei Oberklassen der höheren Schulen über, die wir früher zurückgestellt hatten.

Dabei wird eine Kritik der geltenden Lehrpläne und die Aufstellung eines verbesserten Programms im Sinne der eingangs kurz bezeichneten Reformbewegung meine Hauptabsicht sein. Um indessen einen sicheren Standpunkt für die Beurteilung der gegenwärtigen Verhältnisse zu gewinnen, müssen wir bedenken: diese Verhältnisse sind von den Zufälligkeiten der historischen Tradition in weitgehendem Maße beherrscht. Es wird sich also empfehlen, zunächst einmal einen Rückblick in die Vergangenheit zu tun. Lassen Sie uns betrachten, wie sich der mathematische Unterricht an den höheren Schulen unter dem Einfluß der Zeitströmungen und nach dem Gesetz der Kontinuität allmählich entwickelt hat.

---

*) Man vergleiche die Verhandlungen jenes Unterrichtsausschusses vom Oktober 1905 zu Berlin: Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure **50** (1906), Seite 72—80; und das Ergebnis der Verhandlungen vom Oktober 1906 zu Berlin: ebenda **51** (1907), Seite 299—304.

Vierter Abschnitt.

Vom historischen Entwicklungsgang des mathematischen Unterrichts unserer höheren Schulen.

Bei diesem historischen Abriß, meine Herren, kann ich mich keineswegs vollständig auf den mathematischen Unterricht beschränken. Wir möchten doch einen Begriff davon gewinnen, welche Umstände zu den verschiedenen Zeiten die Umgrenzung und Behandlung des mathematischen Lehrstoffs bestimmt haben. Zu dem Zweck müssen wir uns einerseits ohne Zweifel einen Überblick über die allgemeine Entwicklung unseres höheren Unterrichtswesens verschaffen, und diese ist wiederum nur aus den großen geistigen Bewegungen, die das Milieu der Zeit charakterisieren, und aus den politischen oder sozialen Verhältnissen heraus zu verstehen. Andererseits dürfen wir natürlich ebensowenig übersehen, daß der Schulunterricht immer auch durch den jeweiligen Stand der Wissenschaft mitbedingt ist und mitbedingt sein muß. Es scheint mir zweckmäßig, daß wir uns mit dem letztgenannten Punkt einmal vorweg beschäftigen.

Vorbemerkung über die historische Entwicklung der mathematischen Wissenschaft.

Wir mögen uns hier, meine Herren, ganz kurz — Einzelausführungen für den zweiten Hauptteil dieser Vorträge vorbehalten — über die hauptsächlichsten Errungenschaften der Mathematik in ihrer zeitlichen Folge orientieren, soweit sie für unseren Schullehrstoff in Betracht kommen*). Sie werden bald erkennen, daß die heutige Schulmathematik, ebenso wie das berühmte Aachener Münster in meiner Heimat, aus den mannigfachsten Stücken zusammengesetzt ist, die sehr verschiedenen Jahrhunderten entstammen; nur ist der Gesamteindruck eben nicht so malerisch wie dort. —

*) Ich verweise gern auf das eingehende und sorgfältige Werk: *J. Tropfke*, Geschichte der Elementarmathematik, 2 Bände, Leipzig (Veit) 1902—03.

An erster Stelle hätten wir die Planimetrie und Stereometrie in ihrem systematischen Aufbau zu nennen, die bekanntlich aufs Altertum, speziell auf *Euklids* „Elemente“ zurückgehen. *Euklid* (um — 300) ist allerdings nicht der Schöpfer dieser Dinge, sondern hat hauptsächlich die zahlreichen vorherigen Errungenschaften anderer Forscher, deren Namen uns nicht so bekannt klingen, in ein System gebracht. Weiter stammt in unserer Schulmathematik noch aus dem Altertum die sogenannte Kreismessung, die von *Archimedes* (um — 250) herrührt, und das Werk des *Apollonius* (um — 220): die in Schulkreisen sogenannte „synthetische“ Lehre von den Kegelschnitten.

Es folgt dann ein sehr langer Zwischenraum, aus dem wir eigentlich nichts aufzuzählen haben. Die Zeit nach der Blüte der griechischen Mathematik ist zwar auch nicht völlig arm an wissenschaftlichen Entdeckungen, bei den späteren Griechen, den Indern und den Arabern. Aber teils handelt es sich mehr um Spezialarbeiten, die in unseren Schullehrstoff nicht übergegangen sind, so z. B. die Untersuchung zahlreicher höherer Kurven; teils sind es Gegenstände, die in einer modernen Form ein ganz anderes Aussehen gewonnen haben, ich denke besonders an die Trigonometrie, ich könnte auch auf die diophantischen Gleichungen hinweisen. Der entscheidende Punkt für das Einsetzen einer neueren Entwicklung wurde die Aufnahme der sogenannten arabischen Ziffern im Abendland im 12. und 13. Jahrhundert.

Verfolgen wir nun in kurzen Stichworten, wie die Wissenschaft bei uns fortschritt; ich werde überall runde Zahlen nennen, um nicht ins Detail zu gehen. Die Entstehung unserer modernen ebenen und sphärischen Trigonometrie kann auf 1500 angesetzt werden (*Regiomontan*). Um 1550 erfährt die formale Gleichungslehre ihre große Bereicherung, indem die allgemeine Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades durch Wurzelzeichen gefunden wird (*Tartaglia, Cardano, Ferrari*). Um 1600 haben wir die eigentliche Ausbildung der Buchstabenrechnung (*Viète*) und das Aufkommen der Dezimalbrüche. Es folgen dann um 1620 — um auch hier runde Zahlen zu nennen — die Einführung der Logarithmen (*Napier*) und die ersten Inhaltsberechnungen nach Infinitesimalprinzipien (*Kepler, Cavalieri*).

Um 1640 wird die analytische Geometrie als allgemeine Methode geschaffen (*Descartes, Fermat*), womit eine erste Erfassung des Funktionsbegriffs eingeleitet ist. Um 1650 haben wir schon zahlreiche Differentiationen und Integrationen mittels spezieller Methoden (*Descartes, Fermat, Pascal*); um 1670 eine ausführlichere Betrachtung unendlicher Reihen, insbesondere die Entwicklung der allgemeinen Binomialreihe nach der Methode der un-

bestimmten Koeffizienten (*Newton*). Endlich um 1680 oder 1690 finden wir die Differential- und Integralrechnung als allgemeinen Kalkul ausgebildet (*Leibniz*, *Newton*). Um einer späteren ausführlicheren Betrachtung nicht vorzugreifen, will ich hier nur soviel bemerken, daß bei der Infinitesimalrechnung zunächst, so z. B. in dem ersten Lehrbuch von *de l'Hospital**), hauptsächlich die formale Seite, das Rechnen mit Differentialen hervortrat. Wenn auf die Grenzmethode auch bei *Newton* gelegentlich klar hingewiesen wird, so war doch die einwandfreie systematische Fundierung der Infinitesimalrechnung auf den Grenzbegriff und die exakte Einführung des sogenannten Mittelwertsatzes einer späteren Zeit vorbehalten, sagen wir ganz rund der Zeit um 1800 herum (*Lagrange*, *Cauchy*).

Von der Erfindung der Infinitesimalrechnung an hat die hohe Mathematik eine überaus großartige Entwicklung genommen. Sie gewinnt dabei indes immer mehr einen esoterischen Charakter. Für uns ist es denn auch nicht mehr der volle Umkreis der mathematischen Wissenschaften, über den ich in dieser knappen Form zu referieren habe, sondern nur speziellere Dinge kommen noch für unsere Betrachtung in Frage. Da haben Sie zunächst um 1750 *Euler*s „Introductio"**) mit ihrer umfassenden formalen Ausbildung der algebraischen Analysis, unter anderem auch mit den bekannten Eulerschen Relationen zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen. Sodann ist etwa um 1790 die darstellende Geometrie in ihrer typischen Ausgestaltung zu nennen (*Monge*), überhaupt die Lehre vom perspektivischen Zeichnen; zur gleichen Zeit haben Sie in Deutschland die sogenannte kombinatorische Schule, welche die formale Kombinatorik zur besonderen Entwicklung brachte. Ferner datiert von 1830 die projektive oder „neuere" Geometrie in ihrer Systematik. Endlich will ich tabellarisch noch einige Dinge anführen, die wenigstens einen gewissen Einfluß auf den Schullehrstoff erkennen lassen oder doch in etwa beanspruchen können. Da haben wir die Lehre von den Determinanten um 1840; das eingehendere Studium der Funktionen von $x + iy$ um 1860; die Prägung des modernen Irrationalzahlbegriffs 1870, der nun auch in der Geometrie die Führung übernimmt; das allgemeine Hervortreten des Gruppenbegriffs 1870; das Bekanntwerden und der Ausbau der nichteuklidischen Geometrie 1870; endlich das Eindringen der Mengenlehre in weitere Kreise, sagen wir rund 1890.

Soviel wollte ich gern vorweg in Kürze von der Entwicklung der Wissenschaft berichten, damit wir eine gewisse Grundlage haben,

*) Analyse des infiniment petits, Paris 1696.
**) Introductio in analysin infinitorum, Lausannae 1748.

auf die wir uns im folgenden stützen können. Sie sehen in der Tat: was von der mathematischen Wissenschaft auf den Schulunterricht gewirkt hat, sind die Produkte der allerverschiedensten Zeiten. —

Nun zu unserem höheren Schulwesen, dessen Werdegang unter den allgemeinen Zeiteinflüssen wir ja betrachten wollten, um damit zugleich ein volleres Bild von der Entwicklung des mathematischen Unterrichts und der heutigen Stellung der Mathematik im höheren Bildungswesen zu gewinnen. Dabei möchte ich mich indes auf die Verhältnisse im protestantischen Norddeutschland beschränken, da diese für das Verständnis des heutigen Schulwesens in Preußen die Grundlage bilden. Auch will ich mich, obschon ich hie und da ausholen muß, im ganzen möglichst knapp fassen. Leider steht eine umfassende allseitige Darstellung, auf die ich Sie direkt verweisen könnte, zur Zeit noch aus. Immerhin wird Ihnen das eigne Studium der Werke, aus denen der folgende Bericht vielfach schöpft, reiche Anregung geben. Ich nenne hier vor allem: *F. Paulsen*, Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten*); sodann *A. Heubaum*, Geschichte des deutschen Bildungswesens**), wovon bisher ein erster Band erschienen ist. Ein kürzer gefaßter Bericht liegt in dem Artikel vor: Das höhere Knabenschulwesen, von *A. Matthias*, in dem neuen enzyklopädischen Werke „Die Kultur der Gegenwart“ [0]). Endlich führe ich zwei Schriften betreffend den mathematischen Unterricht an: *O. Beier*, Die Mathematik im Unterrichte der höheren Schulen von der Reformation bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts [00]); und *F. Pahl*, Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen †). Weitere Literatur, insbesondere die Quellen, in die ich mich als Nichtfachmann nicht habe vertiefen können, werden in diesen Publikationen nachgewiesen.

Um Ihnen im übrigen für das folgende die Auffassung zu erleichtern, will ich die gesamte Zeit vom Ausgang des Mittelalters bis heute in vier Perioden einteilen, die wir der Reihe nach vornehmen. Ich beginne gleich mit der ersten Periode:

---

*) Mit dem Zusatz: vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart, mit besonderer Rücksicht auf den klassischen Unterricht, 2. Auflage, 2 Bände, Leipzig (Veit) 1896/97.

**) Mit dem Zusatz: seit der Mitte des 17. Jahrhunderts; Band I: Das Zeitalter der Standes- und Berufserziehung, Berlin (Weidmann) 1905.

[0]) Teil I, Abteilung 1: Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart, Leipzig (Teubner) 1906, Seite 120—174.

[00]) Schulprogramm 1879, Nr. 461 (Realschule zu Crimmitschau).

†) Schulprogramme 1898, Nr. 101; 1899, Nr. 104 (Städtisches Realgymnasium zu Charlottenburg).

Das Unterrichtswesen im humanistisch-reformatorischen 16. Jahrhundert.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst, meine Herren, kurz den Geist dieser Zeit. Der Humanismus (der „alte“ im Gegensatz zum späteren Neuhumanismus) bedeutete den geistigen Rückschlag gegenüber der Poesielosigkeit und der Vernachlässigung der Form in den gelehrten Studien des Mittelalters (Scholastik). Während die spätere mittelalterliche Gelehrsamkeit die Sprache der Alten nur wegen des sachlichen Inhalts der Lektüre gepflegt hatte — man wollte damals daraus die Wissenschaft lernen, die man als das sozusagen abgeschlossene Erzeugnis des Altertums auffaßte — trat mit dem Humanismus das ästhetische Moment in den Vordergrund; und zwar beabsichtigte man eine geistige Wiedergeburt, eine Vertiefung des Menschentums wesentlich durch eine Aneignung antiker Formen, durch Imitation. In diesem Geiste war zu Beginn unseres Zeitraums die Umgestaltung des inneren Unterrichtsbetriebes geschehen. Die bald nachher einsetzende Kirchenreformation hatte zunächst zwar der „heidnischen“ geistigen Bildung den Stempel des Minderwertigen aufzudrücken gedroht; für den weiteren Verlauf unserer Periode sind jedoch die bezeichneten humanistischen Ideen im Unterrichtswesen ausschlaggebend geblieben, indem man fand, daß sich klassischer Formenschmuck mit christlichen Grundanschauungen sehr wohl vereinigen ließ. Übrigens blieb dabei die Auffassung von der abschließenden Leistung des Altertums ziemlich noch dieselbe wie vorher.

Was nun die äußeren Einrichtungen des norddeutschen Unterrichtswesens betrifft, das besonders dank dem Einfluß der Reformatoren und den hinzukommenden Bemühungen einzelner Fürsten einen bedeutenden Aufschwung in unserem Zeitraum nahm, so betone ich im folgenden namentlich die Punkte, in denen fundamentale Unterschiede von unseren gegenwärtigen Verhältnissen bestehen. Vor allem, meine Herren, man hatte damals noch keinerlei staatlich geregeltes Berechtigungswesen wie heute; eine feste Abgrenzung für das Ende des Schulbesuchs und den Beginn des Universitätsstudiums, wie sie z. B. durch unser Abiturientenexamen festgelegt ist, war nicht vorhanden. Das Alter derer, die zur Universität gingen, war dementsprechend in höherem Maße verschieden als heutzutage, und nicht mindere Ungleichheit bestand in der Vorbildung. Auch die Lehrgebiete von Schule und Universität griffen stark übereinander; die Universitäten sorgten mit für solche, die das Schulpensum noch nicht hinreichend beherrschten, und die Schulen ihrerseits hatten vielfach den Ehrgeiz, in einigen Lehrgegenständen den Universitäten gleichzukommen.

Betrachten wir kurz die Haupttypen der Lehranstalten unserer Periode. Zunächst die vom Mittelalter überkommenen, meist dreiklassigen Lateinschulen, die Sie so verstehen müssen, daß der Schüler im Durchschnitt zwei oder drei Jahre auf jeder Klassenstufe verblieb. Ihr Unterrichtsgebiet pflegte mit der lateinischen „Grammatik“ abzuschließen.

Zu diesen Anstalten treten als eine Neubildung unseres Zeitraums erweiterte fünfklassige Lateinschulen, welche nun nach und nach die Vorbereitungsschulen für die Universität wurden. Ihre Organisation geschah ganz im humanistisch-reformatorischen Geist. Die drei Unterklassen liefen den Stufen der alten Lateinschule parallel; die Oberklassen waren besonders rhetorisch-poetischen Übungen gewidmet, wobei man, wie ich schon andeutete, nicht selten auf die Lehrgegenstände der Universität hinübergriff.

Endlich die Universitäten. An ihnen bildeten die Theologie und die zuerst selbständig neben sie getretenen Wissenschaften der Jurisprudenz und Medizin die drei „oberen“ Fakultäten; die vierte, die sogenannte artistische Fakultät vertrat den Inbegriff der alten „artes liberales“ und nahm eine gewisse Sonderstellung ein. Indem nämlich die Kenntnis der artes liberales die Vorbedingung für alle weiteren Studien bildete, diente diese Fakultät im wesentlichen als Vorbereitungsanstalt für die drei anderen. Man muß eben bedenken, daß sie noch nicht im besondren die Mission hatte, künftige Lehrer heranzubilden. Es gab damals überhaupt keinen Stand der akademisch gebildeten Lehrer, geschweige denn eine spezielle oder gar spezialistische Ausbildung derselben. Was an den Schulen unterrichtete, das waren in der Regel Kleriker, die ihren Lehrerposten als eine Durchgangsstelle zu dem angeseheneren und einträglicheren Pfarramt betrachteten, daneben aber auch Leute, die sich überhaupt nur einen notdürftigen Bildungsgrad irgendwie erworben hatten. —

Aber nun zum mathematischen Unterricht in unserem Zeitraum! Bei den Humanisten genoß die Wissenschaft der Mathematik als solche ein hohes Ansehen. Natürlich handelte es sich dabei um die von den Griechen überlieferte Wissenschaft, speziell um das traditionelle Hauptwerk, die „Elemente“ des *Euklid*. Die Vorlesung hierüber gehörte an den Universitäten zu dem allgemeinverbindlichen Kurs der artistischen Fakultät. An den Lateinschulen dagegen finden wir dieses Lehrgebiet nicht (oder doch so gut wie gar nicht), und das darf uns nicht wunder nehmen, denn dort hatte das Latein, dessen Kenntnis die Grundlage jeglicher höheren Bildung und alles weiteren Lernens bedeutete, ausschließliche Herrschaft.

Ein wichtiges Ereignis in unserer Periode ist aber für Schulen und Universitäten das durch praktische Bedürfnisse veranlaßte Eindringen

des Rechenunterrichts. Im 13. Jahrhundert war mit dem Aufblühen des deutschen Handels (ich erinnere Sie an die Hansa) die Rechenkunst mit arabischen Ziffern von Italien zu uns herübergekommen. Die größeren Handelsstädte hielten sich bald ihren Rechenmeister, der die angehenden Kaufleute in dieser wichtigen Kunst unterwies; nach und nach gründeten sie eigene Rechenschulen, an denen die Spezies, die Regeldetri und das heute sogenannte kaufmännische Rechnen gelehrt wurden*). Diese Entwicklung hatte sich getrennt von den Lateinschulen und Universitäten vollzogen. Als nun in der von uns betrachteten Periode das Unterrichtswesen auf der Grundlage von Humanismus und Kirchenreformation zum großen Teil neugeordnet wurde, da drang eben auf Betreiben der großen Handelsstädte das Rechnen in den Schulunterricht ein. Auf den obersten Stufen der fünfklassigen Lateinschulen wurden mit ein bis zwei Wochenstunden die „Elementa arithmetices" eingeführt; und ebenso findet sich nun weiterhin auf den Universitäten eine zweite mathematische Vorlesung desselben Titels. Hier ging man etwa bis zu den gemeinen Brüchen und der Regeldetri, dort wohl selten über das Numerieren und die vier Grundrechnungsarten hinaus. Das spezieller praktische Rechnen fiel dem Charakter der gelehrten Bildung gemäß fort. Die Lehre von den Gleichungen, also die Algebra oder — wie sie genannt wurde — die „Koß", damals das höchste in der mathematischen Wissenschaft, wurde natürlich nirgendwo im allgemeinen Unterricht gelehrt. —

Wir treten jetzt in einen zweiten Zeitraum ein, den ich überschreiben möchte:

Die Weiterentwicklung des Unterrichtswesens im realistisch-utilitarischen 17. und 18. Jahrhundert.

Um die Wende des 16. Jahrhunderts zum 17. hatte sich die humanistische Begeisterung ziemlich erschöpft und damit drangen neuere Gegenbestrebungen durch. Insbesondere lenkte die aufstrebende Naturwissenschaft (*Kepler, Galilei* usw.) den Blick der Menschheit weg von der Bewunderung des Vergangenen vorwärts in die neue Aufgaben stellende Zukunft. Mißmut griff Platz über die zu geringen und zu langsamen Erfolge im bisherigen Unterrichtsbetrieb; die Pädagogen (*Ratichius, Comenius*) suchten nach einem Weg, den Lernenden rascher zum Wichtigsten, zum Unterricht in den Realien zu führen.

Diese Ansätze wurden zwar durch den ganz Deutschland verwüstenden dreißigjährigen Krieg zum großen Teil zerstört. Nach

*) Genaueres, was Sie interessieren wird, finden Sie in dem Buch von *F. Unger:* Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, Leipzig (Teubner) 1888.

dem Friedensschluß trat Deutschland unter die geistige Führung Frankreichs, wo sich unter der Glanzherrschaft *Ludwigs XIV.* eine hohe Blüte der Kunst und Wissenschaft entfaltete. Aber der französisch-rationalistische Geist, der damit in Deutschland einzog, setzte durchaus die Abneigung gegen den alten Humanismus fort. Im Bewußtsein des eigenen Könnens verachtete man die bloße Nachahmung der Alten und empfand die frühere Büchergelehrsamkeit als Pedanterie. Das ganze geistige Leben war jetzt von politischen und wirtschaftlichen Interessen erfüllt; den angesehensten Stand bildeten nicht mehr die Gelehrten, sondern die meist dem Adel angehörigen Staatsmänner. Das Zeitideal (etwa *Leibniz* als Typus) wurde der Besitz höfischer Bildung, wozu nicht zuletzt die Kenntnis der mathematischen und realen Wissenschaften gehörte. Der maßgebende Gesichtspunkt für alle Werturteile war die Utilität; man interessierte sich hauptsächlich für Dinge, die für das Leben eines Weltmanns Wichtigkeit hatten. Zudem sei erwähnt, daß auch der seitwärts vom Rationalismus stehende, spezifisch deutsche Pietismus in seinen stark realistisch-utilitarischen Neigungen den Zeitgeist erkennen läßt; und der Pietist *Francke* hat bekanntlich einen großen Einfluß auf den Unterrichtsbetrieb ausgeübt.

Die ganze hier geschilderte Bewegung müssen Sie natürlich wie alle solchen geistigen Umwälzungen so verstehen, daß sie zunächst von einer kleinen Minorität ausging und dann erst nach und nach in breitere Schichten drang. Mit dieser Verbreiterung entstand aber aus dem philosophischen Rationalismus, wie ihn *Christian Wolff* um 1700 an der Universität lehrte, schließlich die sogenannte Aufklärung. Diese wurde in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die Grundanschauung, die in weitesten Kreisen herrschte; ihr realistisch-utilitarischer Charakter ist Ihnen ja im allgemeinen bekannt. Wie inzwischen bereits ein neuer Humanismus allmählich aufstieg, der zu ganz anderen Anschauungen hinführte, das werden wir erst im nächsten Abschnitt betrachten. —

Die äußere Einrichtung des Unterrichtswesens blieb in unserem Zeitraum im großen und ganzen dieselbe wie im vorigen. Was der dreißigjährige Krieg zerstört hatte, gelang hernach, wenn auch ganz allmählich, wiederherzustellen. Wir haben die Universitäten, mit der vierten, vorbereitenden Fakultät, wir haben die Lateinschulen von höheren und niederen Stufen, wir finden auch weiter das Bestreben größerer Anstalten, sich universitätsartig auszudehnen; eine allgemeine feste Abgrenzung der verschiedenen Schultypen gegeneinander besteht ebensowenig wie vorher. Jedoch muß ich einer spezifischen Schöpfung des 17. Jahrhunderts gedenken, das sind die „Ritterakademieen“, Anstalten, die etwa der Oberstufe der genannten höheren Lateinschulen

parallel stehen. Sie gingen aus dem Bedürfnis hervor, den jungen Angehörigen des Adelsstandes eine zeitgemäße höfische Bildung zu vermitteln, wozu die alten Schulen nicht mehr geeignet schienen. An den neuen Anstalten wurden denn (neben dem allerdings unvermeidlichen Latein) besonders die höfischen Sitten und im Zusammenhang damit die sogenannten „galanten“ Disziplinen gelehrt, nämlich Geschichte und Politik, Mathematik und Physik, moderne Sprachen, Geographie und einiges andere. Für unsere Betrachtung sind nun die Ritterakademieen deshalb wichtig, weil sich nach ihrem Vorbild, auch mit Unterstützung der Landesregierungen, allmählich die Universitäten und die Lateinschulen umzugestalten bemühten. Auf diesem Wege drangen im 17. Jahrhundert die genannten Fächer nach und nach in das Pensum der Schulen und Universitäten ein!

Im 18. Jahrhundert sind die äußerlichen Veränderungen in den Organisationen ebenfalls wie gesagt geringfügig und haben mehr nur als Vorboten für die großen Umgestaltungen der nächsten Periode Wichtigkeit. Die alten Lateinschulen, kleinere wie früher mit drei, größere nicht selten mit sechs, sieben Klassen (je ein bis anderthalb Jahren entsprechend), funktionierten noch immer als Bürgerschule und höhere Schule zugleich. Freilich war das Bedürfnis nach einer „Realschule“ für spätere Kaufleute, mittlere Beamte, überhaupt solche, die eine über die Elemente hinausgehende, aber doch nicht altsprachliche Bildung nötig hatten, ganz allgemein. Eine erste lebensfähige Schöpfung dieser Art entstand 1747 zu Berlin durch den aus dem Pietismus hervorgegangenen *J. J. Hecker*; Nachahmungen der Anstalt blieben indes noch vereinzelt und ohne rechte Bedeutung. — Auch die Abgrenzung der Schulen nach oben hin entbehrte wie früher des Gleichmaßes. In Preußen wurde zwar 1788 eine Anzahl von „gelehrten Schulen“ durch die Einführung eines Abiturientenexamens privilegiert. Doch das bedeutet nicht mehr als einen ersten Anfang. Das Reifezeugnis war eine hinreichende, aber nicht die notwendige Bedingung für die Immatrikulation an der Universität oder für den Eintritt in eine höhere Staatsstellung. — Endlich behielt auch die vierte Fakultät ihren früheren Charakter, indem die theologischen Examina nach wie vor zum Lehrer qualifizierten. Und die Hauptvorlesungen blieben meist enzyklopädisch, obschon sie allmählich nicht mehr publice, sondern privatim stattfanden. —

Betrachten wir jetzt, meine Herren, für unsere Periode im besondren wieder den mathematischen Schulunterricht. Nun, für die ganze Zeit ist die starke Betonung seiner Unentbehrlichkeit charakteristisch. Alle Pädagogen sind sich darin einig: man muß vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs praktische Leben den größten direkten Nutzen gewährt. Der mathe-

matische Lehrstoff ist dementsprechend völlig mit Anwendungen durchsetzt, und in dieser Form erobert sich die Mathematik jetzt ihre neue Stellung. Wesentlich trägt dazu auch der Umstand bei, daß die mathematische Wissenschaft in dieser Zeit in vornehmem Ansehen steht: die hervorragendsten Geister gerade auch unter den Philosophen — ich erinnere nur an *Leibniz* — sind zugleich bedeutende Mathematiker.

Im 17. Jahrhundert finden wir freilich den mathematischen Kursus an den Lateinschulen meist noch wenig erweitert. Immerhin hat sich hier jetzt das früher angegebene Maß des mathematischen Lehrstoffs ziemlich überall eingebürgert. Vielfach führt der Rechenunterricht bis zur Regeldetri; selten dagegen wird Geometrie gelehrt, häufiger noch die „doctrina sphaerica", worunter Sie sich eine mathematische Erdkunde vorzustellen haben. Wesentlich weiter indessen ging der Betrieb an einzelnen ausgezeichneten Anstalten, wie zu Nürnberg und Hamburg, der sogar den der Ritterakademieen nicht unerheblich übertraf; hervorragende Universitätslehrer der Mathematik (*Jungius*, *Weigel*, *Joh. Christoph Sturm*) hatten ihn angeregt, zum Teil auch organisiert. Dort wurde von unten auf Rechnen, Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie gelehrt, und ferner Baukunst, Optik, Astronomie, Zeitrechnung usw. usw. Es war etwa so viel, wie inzwischen der allgemeine mathematische Kurs an den Universitäten enthielt. An den Ritterakademieen wurde die Mathematik besonders wegen der Anwendung auf die „Fortifikation", d. i. die Kunst der Anlage von Befestigungen, gepflegt. Alles in allem genommen lassen jedoch diese Erweiterungen des mathematischen Lehrstoffs die neuesten wissenschaftlichen Errungenschaften [man vergleiche Seite 68] — etwa abgesehen von der Trigonometrie — ganz aus dem Spiel.

Seit dem Anfang des 18. Jahrhunderts erfolgt indessen das Vordringen der Mathematik lebhafter. Schon waren an den größeren Schulen Privatkurse in den „modernen" Fächern neben dem obligatorischen Unterrichte entstanden, jetzt beginnen sie sich bald dem übrigen Betrieb einzuordnen. Als Vorbild diente vielfach die Einrichtung an den *Francke*schen Anstalten in Halle, die von kleinen Anfängen (1695) rasch zu großer Bedeutung gelangt waren; dort wurde Rechnen, Geometrie und Astronomie nebst den Anwendungen ausführlich getrieben.

Vor allem aber spielt eine äußerst wichtige Rolle bei dieser Entwicklung der Schüler *Leibniz*ens, der Philosoph und Mathematiker *Christian Wolff* (lebte 1679 bis 1754) an der Universität Halle. Bei ihm ist wie überall zu seiner Zeit der Blick in erster Linie auf die direkte praktische Verwertbarkeit der mathematischen Kenntnisse gerichtet. Daneben indessen betont *Wolff* nicht minder den allgemeinen

Nutzen des Mathematikunterrichts für die Schärfung des Verstandes, also das formal bildende Moment; von da dringt allmählich eine Tendenz auf exakte Beweisführung auch in den Schulunterricht ein!

*Wolff*s mathematische Lehrbücher bezeichnen etwa die oberen Grenzen, denen bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts der Unterricht an Schule und Hochschule zustrebt. Die vierbändigen „Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften“ (1710)*), für den Gebrauch bei Universitätsvorlesungen hauptsächlich bestimmt, beginnen mit dem numerischen Rechnen („Arithmetik“), Geometrie, Trigonometrie einschließlich Logarithmen, und führen durch die breitbehandelten Anwendungsdisziplinen bis hin zur „Algebra“, welche zunächst das Buchstabenrechnen und die Lehre von den Gleichungen, dann aber auch eine analytische Geometrie der Kurven und die Infinitesimalrechnung umfaßt. Das geht also bis zum Allerneuesten der damaligen Wissenschaft! Der „Auszug aus den Anfangsgründen...“ (1713)**), nach des Verfassers Angabe „zum bequemeren Gebrauche der Anfänger, sonderlich auf Schulen, verfertigt“, enthält Rechnen, Geometrie, Trigonometrie wie auch die Anwendungsdisziplinen in knapper Auswahl; und in der Algebra beschränkt er sich auf das Buchstabenrechnen und das einfachste aus der Gleichungslehre (bis zur unreinen quadratischen Gleichung). — Diese von *Wolff* vorgenommene Umgrenzung, meine Herren, ist für die Weiterentwicklung des mathematischen Schulunterrichts bedeutsam. Die in jenem „Auszug“ behandelten Gebiete sind fortan, soweit sie der reinen Mathematik angehören, selbstverständlicher Inhalt der Schulmathematik.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts tritt bereits ein neuhumanistischer Einfluß hervor, obgleich der allgemein herrschende Geist noch ganz den vorhin geschilderten Charakter trug. Die ersten Neuhumanisten — um sie vorgreifend schon einmal zu nennen: *Gesner*, *Ernesti*, *Heyne* — betonten ihrerseits aufs eifrigste den Wert der Mathematik. Aber als Begründung trat bei ihnen jetzt der direkte Nutzen durch Übermittelung praktisch wichtiger Kenntnisse zurück, und es wurde hauptsächlich der allgemeine Wert für die Verstandesschulung angeführt, also das Prinzip der formalen Bildung. *Christian Wolff*s Bücher, die gewissermaßen den Übergang zu einem neuen Anschauungskreis bilden, wurden nach und nach durch zwei andere Werke verdrängt. Das sind einmal *Ernesti*s „Initia doctrinae solidioris“ (1736)⁰), ein allgemeines Kompendium für Lateinschulen, das am Anfang eine Arithmetik und eine Geometrie (ohne Trigonometrie) enthält, — und andererseits die „Mathematischen Anfangs-

*) Neue Auflage, Frankfurt bzw. Halle 1750.

**) Neue Auflage, Frankfurt 1750.

⁰) Spätere Auflage, Leipzig 1796.

gründe" (1756)*) des Göttinger Professors *A. G. Kästner*, ein mehrbändiges, für Universitätsvorlesungen bestimmtes Werk, dessen erste Teile sich aber auch an Lateinschulen allmählich einführten.

In diesen Büchern tritt das Interesse am Formalen deutlich hervor. *Ernesti* nahm zum numerischen Rechnen das Buchstabenrechnen in die „Arithmetik" herein, wo es weiterhin seine Stelle behalten hat. *Kästner* machte es in seinem Werke (Band I) ebenso und bemühte sich, dem Buchstabenrechnen das Geheimnisvolle, das ihm bisher noch angehaftet habe, endgültig zu nehmen. (Die Algebra steht allerdings bei *Kästner* erst in Band III mit analytischer Geometrie und Analysis des Unendlichen zusammen, bei *Ernesti* fehlt sie überhaupt.) Andererseits finden wir die angewandte Mathematik, die früher eine so große Rolle spielte, jetzt von der reinen gesondert und stark zurückgedrängt. Bei *Kästner* nimmt sie die Bände II und IV ein, die als Schulbuch keinenfalls in Betracht gekommen sind; bei *Ernesti* ist sie ganz eliminiert. Mit diesem Hervortreten des Formalen ist gewissermaßen die Überleitung zum folgenden Zeitraum gegeben. —

Treten wir jetzt ins 19. Jahrhundert ein, meine Herren, so möchte ich Ihnen vorweg einige weitere Literatur nennen, aus der Sie genauere Belehrung über die hier kurz zu schildernden Verhältnisse entnehmen können. Da ist zunächst: *M. Nath*, Lehrpläne und Prüfungsordnungen im höheren Schulwesen Preußens seit Einführung des Abiturientenexamens**); ferner die geschichtliche Einleitung des Artikels: Lehrpläne und Lehrbetrieb von *R. Lehmann* in *Lexis*' „Unterrichtswesen"⁰). Speziell betreffs des mathematischen Unterrichts habe ich mein eigenes Referat von 1902 schon früher [Seite 29] genannt; daneben führe ich noch den Aufsatz von *F. Pietzker* an: L'enseignement mathématique en Allemagne pendant le 19e siècle⁰⁰). Und nun lassen Sie uns mit den beiden ersten Dritteln des 19. Jahrhunderts eine dritte Periode abgrenzen. Sie mag durch die Überschrift bezeichnet sein:

Einheitliche staatliche Organisation speziell der Gymnasien in der Zeit der formalen Bildung.

(Die beiden ersten Drittel des 19. Jahrhunderts.)

Wir beschränken uns hier wieder, wie schon häufiger, auf den preußischen Staat. Die Entwicklung ist allerdings in den übrigen

*) Band I 1 in 6. Auflage, Göttingen 1800; die übrigen Teile I 2 bis IV 2 in niederen Auflagen, ebenda 1790—1801.

**) Berlin (Pormetter) 1900.

⁰) Band II [zitiert Seite 19], Seite 67—92.

⁰⁰) In der Zeitschrift: L'enseignement mathématique **3** (1901), Seite 2—25, 77—97.

Staaten des protestantischen Norddeutschlands abgesehen von Phasendifferenzen dieselbe; aber wenn wir es eingehender verfolgen wollten, würden wir uns den Überblick in der Tat sehr erschweren.

Die politischen Ereignisse in der napoleonischen Zeit sind Ihnen in den Umrissen hinreichend bekannt. Ich will Sie nur eben erinnern, wie unter dem Ansturm des großen Eroberers der preußische Staat zusammenbrach (1806/07) und wie dies die von Erfolg gekrönten inneren Bestrebungen auf eine völlige Wiedergeburt des Staatswesens und des Volkes auslöste. Damit wird unsere Periode, insbesondere seit der Wiederherstellung des europäischen Friedens (1815), die Zeit einer Neuorganisation von Grund aus. Das Entscheidende ist aber hierbei, daß jetzt der Kreis der führenden Persönlichkeiten weitgehend vom Geiste des Neuhumanismus beherrscht ist; und diese neuhumanistische Bewegung, deren Anfänge, wie bereits angedeutet, eine erhebliche Zeit zurückliegen, müssen wir uns noch kurz klar machen.

Gleich mit ihrer zunehmenden Verbreitung hatte die Aufklärung, von der ich vorhin sprach, eine Gegenbewegung induziert. Es war, als ob ein Vorgefühl von der Flachheit, in welche die Aufklärung hineinmünden sollte, einzelne Geister von Anbeginn auf das tiefere Suchen nach einem neuen Lebensinhalt geführt hätte. Selbst aus einem Unterricht hervorgegangen, der sich abseits in der Stille seine althumanistischen Traditionen bewahrt hatte, wiesen *J. M. Gesner* (1691 bis 1761) und mit ihm *J. F. Christ* (1700 bis 1756) und *J. M. Ernesti* (1707 bis 1781) schon in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts erneut auf das Studium der Alten hin. Es schien derselbe Ruf wie früher, und doch war er etwas ganz Neues! Ihr Ziel war nicht mehr, die Literatur der Alten in der Gegenwart fortzusetzen, es war ihnen nicht um die Imitation zu tun. Sie wollten vielmehr eine Vertiefung in den Geist jener, um Geschmack und Urteil zu bilden; sie betonten die darin liegende formale Bildung.

Die Ausgangspunkte der neuen Ideen wurden Leipzig und die neugegründete Universität Göttingen, wo die eben genannten Männer wirkten. Dort nahm aber die heranwachsende Generation die neuen Anregungen auf und bildete sie weiter. Bedenken Sie, wie *Herder* die Grundideen von der allgemeinen Bildung zur Humanität ausprägte, und wie jetzt aus dem Drang nach ursprünglicher Gefühlstiefe und einem erwachenden Nationalbewußtsein, in ihrer Befruchtung mit dem Geiste des neuen Humanismus, die Blütezeit der deutschen Literatur heraufstieg. Zugleich führte *Kant* auf seiten der hohen Wissenschaft mit seiner Schöpfung der kritischen Philosophie definitiv über die populäre Aufklärung hinaus. Endlich die fernere Wirksamkeit der neuhumanistischen Universitätsprofessoren: in Göttingen lehrte als *Gesners*

Nachfolger *Chr. G. Heyne* (1729 bis 1812), zunächst der unbedingte Führer auf dem Gebiete der klassischen Studien; dann begann ihn *Friedrich August Wolf* (1759 bis 1824) in Halle (später in Berlin) zu verdunkeln, der eigentliche Begründer der klassischen Philologie als selbständiger Wissenschaft. In einem solchen, überaus mannigfachen Ineinandergreifen der geistigen Prozesse haben Sie die Ursache für das Durchdringen des neuhumanistischen Geistes bei einer oberen Schicht von Gebildeten, und das sollte für die Folgezeit den Ausschlag geben. Für die preußische Organisation des Schulwesens seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts kommt vor allem die Tätigkeit zweier begeisterter Vertreter neuhumanistischer Denkrichtung in Betracht: *W. v. Humboldt* (1757 bis 1835) und *F. A. Wolf*. Es war die Überzeugung, daß der geschehene Zusammenbruch des Staates mit in der Morschheit der früheren Weltauffassung seine Ursache gehabt habe, die ihnen die größte Schaffenskraft verlieh.

Gleichwohl kann die Schulorganisation, die aus der Neugestaltung hervorging, keineswegs als ein reines Produkt neuhumanistischer Anschauungen angesehen werden. Sie bedeutet vielmehr einen Abgleich mit den praktischen Forderungen des neuaufblühenden Beamtenstaates. Wir erkennen den neuhumanistischen Sinn z. B. in der Zurückdrängung der Realien gegen den Betrieb der alten Sprachen. Daneben aber war das französische Vorbild des genial organisierten napoleonischen Staatswesens mit seinem mehr mathematisch-realistisch ausgebildeten Beamtentum in aller Bewußtsein. Jedenfalls milderte die Rücksicht auf die Interessen des Staates, die einen mehr allseitigen Schulunterricht der künftigen Staatsbürger verlangte, die Absichten und Pläne, die vielleicht von extrem-neuhumanistischer Seite ins Auge gefaßt worden wären. Und in dieser Weise durchkreuzen sich, worauf ich gleich vorweg hinweisen will, meine Herren, im ganzen 19. Jahrhundert der spezifisch deutsche philologisch-neuhumanistische Einfluß und die zunächst von Frankreich induzierten mathematisch-realistischen Tendenzen! —

Der Grundgedanke der besagten Organisation — um ein wenig näher darauf einzugehen — war die Vereinheitlichung des höheren Schulwesens, insbesondere im Unterrichtsziel. Die Festlegung eines Normalniveaus für die Gymnasien, die, wie ich erwähnte, schon 1788 angebahnt war, gelangte in detaillierteren Vorschriften für das Maturitätsexamen (1812, 1834) zur strengen Durchführung. Das Reifezeugnis wurde für die Immatrikulation unbedingt erforderlich. Dabei waren die aus der großen Zahl der alten Lateinschulen ausgewählten Gymnasien die alleinigen Inhaber aller Privilegien. Die übrigen Anstalten, der Aufgabe der Vorbildung auf die Universität enthoben, gehörten für die Regierung nicht zum höheren

Schulwesen; den Stadtgemeinden blieb überlassen, sie als Bürgerschulen oder Realschulen zu gestalten. Die Schule für den höheren gesellschaftlichen Stand war das Gymnasium; Ritterakademieen und bloßer Privatunterricht erschienen unzeitgemäß und verschwanden.

Eine nicht minder wichtige Neuschöpfung unserer Periode sind die amtlichen Lehrpläne für die Gymnasien (1816, 1837, 1856). Durch sie wurden die Unterrichtsziele der einzelnen Stufen festgelegt, zugleich dabei die untere Altersgrenze für den Eintritt ins Gymnasium auf neun Jahre angesetzt und das Klassensystem konsolidiert: Sexta, Quinta, Quarta je ein Jahr, Tertia, Sekunda, Prima je zwei Jahre*).

Der Lehrplan von 1816, auf *W. von Humboldt*s Anregung gearbeitet von *J. W. Süvern* (1775 bis 1829), ist zwar nie als verbindliche Norm veröffentlicht worden, kennzeichnet aber vortrefflich die Tendenzen der Verwaltung in einer ersten Zeit der enthusiastischen Neuorganisation. Allseitige Schulung der Geisteskräfte, formale Bildung, Übermittelung eines reichen wissenschaftlichen Stoffs, Hintansetzung des schroffen Utilitätsgedankens — das waren die Gesichtspunkte, nach denen die leitenden Persönlichkeiten das Gymnasialwesen zu gestalten begannen. — Mit *Johannes Schulze* (1786 bis 1869), der 1818 das Dezernat für Gymnasien und Universitäten im Ministerium erhielt, folgte dann eine lange Zeit des ruhigen organisatorischen Ausbaues. In einer Reihe von Erlassen und Vorschriften wurde der Kursus der Gymnasien geregelt; am Stoff des *Süvern*schen Plans, der mehr nur als ein Idealbild gelten konnte, viel reduziert und manches geändert. 1837 fand dieser Prozeß durch die Herausgabe eines detaillierten, nun allgemein verbindlichen Lehrplans durch *Schulze* vorläufig seinen Abschluß. Die leitenden Ideen waren soweit dieselben wie früher: Mannigfaltigkeit im Stoff und formale Schulung des Geistes.

Seit dem Jahre 1840 (Thronbesteigung *Friedrich Wilhelm*s *IV.*, Wechsel im Ministerium) fingen neue Tendenzen an auf das Unterrichtswesen zu wirken. Mehr und mehr trat, während der neuhumanistische Enthusiasmus mit der zunehmenden Ausdehnung der philologischen Wissenschaft nachließ, eine Opposition gegen den „antikheidnischen" Geist im Unterricht hervor; andrerseits drang auch der Ruf durch, daß viel zu vielerlei auf den Gymnasien getrieben werde. Das Ziel der Bestrebungen wurde: Hervorkehrung des rein Sprachlichen und Konzentration des Lehrplans aufs Latein hin. Der Erlaß von 1856 bedeutet eine Änderung des Früheren in diesem Sinne, wenn sie auch nicht weitgehend war. Wir können es so ausdrücken:

*) Vorderhand blieb indes noch die Möglichkeit bestehen, die Tertia oder die Sekunda unter Umständen in einem Jahr zu absolvieren; es geschah dies aber immer seltener, wurde freilich erst 1882 ganz abgeschafft.

das Prinzip der Vielseitigkeit, das für *Schulze* mitbestimmend gewesen war, trat zurück; es blieb das Prinzip der formalen Bildung, verbunden mit einem verschärften Antiutilitarismus.

Eine entscheidende Umgestaltung vollzog sich während unserer Periode auch an den Universitäten. Seitdem die Durchführung des Abiturientenexamens an den Gymnasien ein gleichmäßiges und höheres Niveau der Schulbildung erzielte, hörte die vierte Fakultät auf, die Vorschule für die drei „oberen" Fakultäten zu sein; die Gymnasien mit ihrem nun fixierten neunjährigen Kursus übernahmen ihrerseits die Aufgabe, auf alle Universitätsstudien vorzubereiten. Indem sich die vierte Fakultät also selbständig neben die drei übrigen stellte, wurde ihre spezifische Mission jetzt, die künftigen Lehrer der höheren Schulen heranzubilden. Die Prüfungsvorschriften für das Gymnasiallehramt (1810, 1831) legten die Art dieser Ausbildung genauer fest; und so wurde für die Gymnasien ein eigentlicher Lehrerstand mit gesellschaftlichem Gemeingeist geschaffen, das Schulamt war nicht mehr eine Durchgangsstelle zu Pfarren für die Theologen.

Nicht minder wichtig ist in dieser Zeit das Bestreben nach einem von äußeren Zielen unabhängigen Spezialbetrieb aller in der philosophischen Fakultät vertretenen Wissenschaften. Das hängt mit ihrer Emanzipation aufs engste zusammen und stimmt zu der immer mehr durchdringenden Ansicht, daß die rechte Ausbildung der Lehrer nichts weiter als eine tüchtige wissenschaftliche Schulung erfordere. Die klassische Philologie ging voran, die übrigen Disziplinen folgten. In der Mathematik sind besonders (so weit will ich späteren Ausführungen hier schon vorgreifen) *Jacobi* und *Dirichlet* zu nennen, die etwa seit 1830 an der Königsberger bzw. Berliner Universität lehrten und dort den Typus der höheren mathematischen Spezialvorlesungen schufen; ich meine die Vorlesungen, die den Hörer bis an die eigenen neuen Arbeiten des Dozenten selbst heranführen. Immerhin kam es in unserer Periode noch nicht zu allgemeinen weitgehenden spezialistischen Studien bei den Lehramtskandidaten; vielmehr mußten sich diese im Examen gewünschtenfalls über alle Fächer ausweisen können, wenn auch nicht überall gleich Gutes erwartet wurde. —

Was jetzt den mathematischen Unterricht der Gymnasien in unserem Zeitraum betrifft, meine Herren, so zeigt der Lehrplan von 1816 hierfür ein erstaunlich hohes Maß von Lehrstunden und Lehrstoff. Wir haben darin den Einfluß des bedeutenden Aufschwungs zu erkennen, den in Frankreich während der großen Revolution das mathematisch-technische Hochschulwesen genommen hatte. Der Geist des napoleonischen Offizierskorps hatte überall für

den Wert dieser Art wissenschaftlicher Ausbildung gezeugt. So trat der hohe Wert mathematischer Einsicht gerade zu einer Zeit besonders hervor, wo einseitige Philologen gern die Mathematik mehr an die Seite gerückt hätten*). Übrigens betonte auch *Herbart*, mit dem Süvern bekannt war, lebhaft die Wichtigkeit eines ausgedehnteren mathematischen Unterrichts. Daß *F. A. Wolf* persönlich den bildenden Wert der Mathematik sehr geringschätzte — er befand z. B. 1809 bei einem Schulplanentwurf zwei Wochenstunden für ausreichend — kam nicht zur Geltung. *Süvern* setzte für alle Klassen sechs Stunden an.

Und wie ist es in seinem Plan mit dem Lehrstoff? Von Sexta bis Tertia etwa sollte schon das erledigt werden, was man heute bis zum Abiturium verlangt; das Buchstabenrechnen sollte z. B. bereits auf Quinta herankommen, die Logarithmen wurden auf Tertia gelegt. Für Sekunda weiter heißt es: Theorie der Gleichungen und ihre approximative Lösung, Anfänge der Reihenlehre, Methode der unbestimmten Koeffizienten, Elemente der Kombinatorik, sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie mit den Kegelschnitten; für Prima endlich: Gleichungen dritten, vierten Grades, Anfangsgründe der unbestimmten Analytik, figurierte Zahlen, unendliche Taylorsche Reihe, Wahrscheinlichkeitsrechnung, dazu die angewandte Mathematik, insbesondere die mechanischen Wissenschaften. Das starke Hervortreten formalistischer Stoffe entspricht hier ganz dem Zeitgeist; es wirkte wohl auch die erwähnte, von dem Leipziger Mathematiker *K. F. Hindenburg* (1741 bis 1808) ausgehende „kombinatorische Schule" nach. Die Gründung der Infinitesimalrechnung auf die Reihenlehre erscheint von Frankreich her (*Lagrange*) beeinflußt; auch der letzte Versuch dieser Zeit, reine und angewandte Mathematik in einer großen Auffassung miteinander zu vereinigen, erinnert an das französische Vorbild. Das *Süvern*sche Ziel, nach dem die preußischen Gymnasien streben sollten, war in der Tat hoch gesteckt und ging weit über das früher Verlangte hinaus; es zu erreichen war allerdings wohl unmöglich.

Johannes Schulze begann nun alsbald den mathematischen Unterricht gegenüber dem *Süvern*schen Plan stark zu reduzieren. Es wurden vier, bzw. (auf Quarta und Tertia) drei Wochenstunden fest-

*) Was einseitige Philologen anstrebten, kam in Bayern bei der dortigen Neuorganisation des höheren Schulwesens (1808, 1829) durch *F. Niethammer* (1766 bis 1848) und *F. Thiersch* (1784 bis 1862) zur Geltung. Daher rührt die noch heute untergeordnete Stellung von Mathematik und Physik an den bayrischen Gymnasien. Für beide Fächer zusammen schreibt der Lehrplan auf den neun Klassen (von unten nach oben) folgende Wochenstundenzahlen vor: 3, 3, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 4. Vergleichen Sie den Lehrplan selber: Die Schulordnungen für humanistische Gymnasien, Progymnasien und Lateinschulen im Königreich Bayern von 1891 bzw. 1894, . . ., bearbeitet von *J. Füger*, Würzburg (Stahel) 1900.

gesetzt. Das Pensum wurde dementsprechend beschnitten, sodaß man als Lehrziel jetzt folgendes fixierte: „Fertigkeit in den Rechnungen des gemeinen Lebens nach ihren auf die Proportionslehre gegründeten Prinzipien, Sicherheit in der Lehre von den Potenzen und Wurzeln und von den Progressionen, ferner in den Elementen der Algebra und der Geometrie, sowohl der ebenen als der körperlichen, Bekanntschaft mit der Lehre von den Kombinationen und mit dem binomischen Lehrsatz, Leichtigkeit in der Behandlung der Gleichungen ersten und zweiten Grades, eine geübte Auffassung in der Trigonometrie und hauptsächlich eine klare Einsicht in den Zusammenhang sämtlicher Sätze des systematisch geordneten Vortrages" (Reifeprüfungsordnung von 1834). Sie sehen, das Maß ist im großen und ganzen dasselbe, das bis in unsere heutige Zeit hinein in Geltung geblieben ist. Vergleichen wir es mit dem, was der Durchschnitt der Anstalten sagen wir von 1810 zu absolvieren pflegte, so müssen wir alles in allem wohl eine Hebung des mathematischen Unterrichts feststellen. Und dies, obgleich es in der mathematischen Wissenschaft damals an einer Persönlichkeit fehlte, die für die Geltung ihres Fachs im Schulwesen entschieden eingetreten wäre, so wie etwa *F. A. Wolf* für die alten Sprachen. Aber daß *Schulze* persönlich vom Werte des mathematischen Unterrichts wenig hielt (er war Schüler *F. A. Wolf*s), konnte ihn bei seiner offiziellen Stellung nicht verleiten, dem Drang der Verhältnisse und den Forderungen der Zeit entgegen die Mathematik noch stärker zu komprimieren. Innerhalb der engeren Grenzen für uns hat er eine feste und gleichförmige Organisation durchgeführt. Freilich darin zeigte sich nun eine gewisse Einseitigkeit: alles was am mathematischen Lehrstoff *Süverns* irgendwie nach Utilität aussah, war ausgemerzt, insbesondere die Anwendungen. Das geht auf die Rechnung des Prinzips der rein formalen Bildung.

Der Lehrplan von 1856 hat an dem vorhergehenden in mathematischer Hinsicht nicht viel geändert. Die Betonung des Formalen wurde durch die Konzentration des gesamten Unterrichts aufs Latein hin weiter verstärkt, und unter diesem Gesichtspunkt festigte sich von neuem die Stellung der (reinen) Mathematik neben den alten Sprachen. —

Wir kommen endlich, meine Herren, zur vierten, der letzten Periode unseres historischen Abrisses, die das noch übrige Drittel des 19. Jahrhunderts umfassen mag. Man kann sie etwa bezeichnen als die Zeit, wo das höhere Schulwesen zu gleichwertigen nebeneinander parallellaufenden Anstaltsarten (Gymnasium, Realanstalten) ausgebildet wird. Diese Charakterisierung gibt den Grundgedanken an, der sich durch die Vorgänge unserer Periode im Schulwesen deutlich hindurchzieht. Die gesamten Zeitströmungen mit ein paar

Stichworten zu umfassen, wird ja allerdings um so untunlicher, je näher man der Gegenwart kommt. Ich möchte daher jetzt auch auf die strengere Gliederung, wie sie bisher in den einzelnen Perioden eingehalten wurde (Gesamtcharakter, Organisation des Schulwesens, mathematischer Unterricht), verzichten und in freierer Weise über den Gang der Entwicklung referieren. Die Lehrpläne von 1859, (1867), 1882, 1892, 1901, die Ordnungen der Lehramtsprüfungen von 1866, 1887, 1898 und die Schulkonferenzen von 1873, 1890, 1900 werden uns feste Anhaltspunkte für die historische Orientierung geben. Zweckmäßig können wir noch mit dem Jahre 1882 einen Einschnitt machen. Also:

Ausbildung des höheren Schulwesens zu gleichwertigen parallellaufenden Anstaltsarten.

(Letztes Drittel des 19. Jahrhunderts: zunächst bis 1882.)

Im Jahre 1859, das ist von einschneidender Bedeutung, begannen die Realschulen an der Entwicklung des höheren Schulwesens zu partizipieren. Zum Verständnis der Sachlage ist es gut, wenn ich mit einigen Worten noch auf die Vorgeschichte eingehe.

Höhere Schulen von realistischer Tendenz zur Vorbildung für Berufe, die keine Universitätsstudien erforderten, waren im 18. Jahrhundert, wie ich früher schon andeutete, in weiten Kreisen ein Bedürfnis, aber die traditionelle Schätzung der altsprachlichen Anstalten hatte es nur ganz vereinzelt zu organisatorischen Versuchen in dieser Richtung kommen lassen. Erst als im Anfang des 19. Jahrhunderts von seiten des Staates jene Auswahl aus den Lateinschulen zu Gymnasien ausgestaltet wurde, war der Anlaß gegeben, daß sich nun die übrigen Anstalten, deren Fürsorge den Gemeinden überlassen blieb, dem Bedürfnis nach einer mehr realistischen wissenschaftlichen Vorbildung für bürgerliche Berufe anpaßten. Aber im status nascens wurde gleich ihre Stellung zum Latein entscheidend; obwohl die Theoretiker der neuen Anstalten (*G. A. Spilleke*) dagegen eiferten, behielten diese das Latein bei, ja verstärkten es allmählich, indem sie sich damit um die Gunst der Behörden und um äußere Vorteile bemühten. Trotzdem wurde ihnen infolge der Agitation der engeren Vertreter des Gymnasiums gegen die „Nützlichkeitskramschulen" die früher gemachten Zugeständnisse in den vierziger und fünfziger Jahren wieder entzogen. Aber sie haben ihre Lebensfähigkeit gezeigt. Die Konzentration des Gymnasialunterrichts in altsprachlicher Richtung, die in den erwähnten Lehrplänen von 1856 zum Ausdruck kam, hatte die selbständigere Ausbildung des realistischen

Schultypus zum notwendigen Gegenstück. Nach einem Wechsel im Ministerium (1858) drang die Erkenntnis durch, daß hier berechtigte und zeitgemäße Forderungen zu erfüllen seien. So erhielt denn im Jahre 1859 das Realschulwesen zum ersten Mal eine direkte staatliche Grundlage.

Aus den vorhandenen „Real- und höheren Bürgerschulen“ (an Zahl etwa 60) wurden rund die Hälfte ausgewählt und als „Realschulen erster Ordnung“ neben die Gymnasien gestellt; in den nächsten fünf Jahren hat sich ihre Anzahl schon fast verdoppelt. Sie wurden ebenso wie das Gymnasium auf einen neunjährigen Kursus eingerichtet; ihre Lehrer waren den Lehrern jener gleichgeordnet; als Bestimmung der Anstalten galt im Grunde dieselbe: gegenüber der vielfach gewünschten Beschränkung ihres Unterrichtsstoffes auf das für bürgerliche Berufe praktisch Notwendige wurde ausdrücklich ihr nichtutilitarischer Charakter als Allgemeinbildungsschulen festgelegt. Nur in den Berechtigungen bestand der wesentliche Unterschied: die Absolvierung einer Realschule erster Ordnung sollte nur zu Berufen qualifizieren, zu denen keine Universitätsstudien gehörten, wie Baufach, Postfach, Bergfach usw. Das Gymnasium schien vorderhand die Aufgabe, auf die Universitätsstudien vorzubereiten, noch allein erfüllen zu dürfen.

Aus dem Lehrplan der Realschule erster Ordnung, den *L. Wiese* (1806 bis 1900) ausgearbeitet hatte, muß ich erwähnen, daß der Mathematik im Vergleich zum Gymnasium ein Plus von fünfzehn Stunden zuerkannt war; dafür wurden an Lehrstoff nach theoretischer und nach „angewandter“ Seite hinzu aufgenommen: die unendlichen Reihen, die darstellende und die analytische Geometrie, sowie Statik und Mechanik. Das Latein war übrigens jetzt an diesen Anstalten mit beinahe ebensoviel Stunden als die Mathematik fixiert.

Von hier an beginnt nun eigentlich die Realschulbewegung, von der ich gleich an dieser Stelle einiges vorweg andeuten möchte. Es ist ein charakteristischer Vorgang unserer Periode, daß sich die Realanstalten Schritt für Schritt die Anerkennung gleichen Wertes und gleicher Rechte mit den Gymnasien erobern. Die neue Zeit hat die Forderung nach einer modernen, eingehenderen mathematisch-naturwissenschaftlichen und neusprachlichen Bildung neben der alten nicht mehr zurückdrängen lassen. Naturgemäß konnte sich dieser Prozeß nur langsam vollziehen; trotz des gewaltigen Aufschwungs der realistischen Wissenschaften, von Handel, Industrie, Technik in unserem Zeitraum ist gegen viele Hindernisse und althergebrachte Meinungen zu kämpfen gewesen und wird noch gekämpft. Die geschichtliche Betrachtung läßt uns diesen Widerstand klarer begreifen.

Die Mathematik und die übrigen nichtaltsprachlichen Fächer sind alle wesentlich unter dem Gesichtspunkt der Utilität in den höheren Unterricht eingedrungen; aber auch die alten Sprachen haben sich dort vorwiegend aus Nützlichkeitsrücksichten durch die Jahrhunderte gehalten; bis ins 19. Jahrhundert hinein war ja das Latein noch als Gelehrtensprache unentbehrlich. Mit der Überwindung der Aufklärung prägte sich indessen jener Wandel der Ansichten aus, der allmählich zu einer scharf zugespitzten Antiutilität führte. Während nun im Schulbetrieb die alten Sprachen hierbei unter Bezugnahme auf das Prinzip der formalen Bildung das Formal-grammatische hervorkehrten, gefährdeten sie bei ihrer ohnehin starken Position ihr Ansehen nicht. Die Mathematik und Naturwissenschaften dagegen, wo sie ihre hohe Bedeutung für die lebendige Wirklichkeit zurückdrängen mußten, brachten sich bei ihrer wesentlich schwächeren Vertretung in den Ruf, daß sie ganz abseits vom normalen menschlichen Denken liegende Gebiete seien. Das verstärkte sich dadurch noch erheblich, daß diese Disziplinen eben gerade auf den wirklichen Fachschulen notwendigerweise eine Hauptrolle spielten. So entstand denn die Meinung, die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer zielten in allem, was über die ersten Elemente hinausginge, eigentlich doch auf eine „Fachbildung" hin, sie trügen in ungleich geringerem Maße zu einer „Allgemeinbildung" bei als die alten Sprachen, die traditionelle Gymnasialbildung mit überwiegendem Sprachenbetrieb stelle die einzige ideal berechtigte dar.

Das ist es, was für die Realanstalten die hauptsächliche Schwierigkeit bedeutet hat, ihre Gleichschätzung mit den Gymnasien zu erreichen. Es kam allerdings etwas hinzu, worin sie den Gymnasien nachstehen mußten: Während diese einen in der Vergangenheit vielerprobten und (besonders seit 1856) einheitlich geschlossenen Bildungsgang aufweisen konnten, hatte der Lehrplan der Realanstalten zunächst einen wenig organischen Charakter. Auch war die Methodik der realistischen Fächer noch kaum entwickelt, und man schwankte zwischen praktischen, wissenschaftlichen und pädagogischen Gesichtspunkten hin und her. —

Durch die großen Ereignisse der Jahre 1870/71 erhielt das gesamte nationale Leben einen Impuls, der auch auf das Schulwesen entscheidend eingewirkt hat. Sie erkennen, wieder ist es im letzten Grunde ein politisches Moment, das den Periodeneinschnitt anzeigt. Die neue Stellung des errichteten Deutschen Reichs, die damit einsetzende innere Entwicklung machte die Frage immer brennender, wie man, ohne mit den Traditionen ganz zu brechen, dem Bedürfnis nach einer mehr neuzeitlichen Schulbildung gerecht werden könne, — einer Schulbildung, welche vor allem die grund-

legenden Kenntnisse der mathematischen und realistischen Wissenschaften und ein Verständnis für die heutige Sprache und Art des eigenen Volks wie der wichtigsten Nachbarvölker vermittelte.

Bald entbrannte über diesem Problem ein lebhafter Streit widersprechender Ansichten. Auf der Landesschulkonferenz, die 1873 das neue preußische Ministerium zur informierenden Erörterung zusammenberief, traten erkennbar drei Hauptrichtungen hervor, die auch weiterhin in dem allgemeinen Schulkampf zu verfolgen sind. Eine erste Partei wünschte die allgemeine Berechtigung zum Universitätsstudium durchaus dem Gymnasium in alter Weise gewahrt zu sehen. Sie verfocht dabei das Prinzip der Einheitsschule: das Gymnasium sei so weiterzubilden, daß es den alten humanistischen wie den modernen realistischen und neusprachlichen Forderungen gleichmäßig gerecht würde. Das Eindringen des Latein in die Realschulen erschien ihren Vertretern als ein Irrweg der Entwicklung; sie wollten neben dem Gymnasium als alter Gelehrtenschule und einer reinen Realschule von geringerer Klassenzahl als höherer Bürgerschule höchstens einige wenige neunklassige reine Realschulen gelten lassen, die allein zu mehr fachmäßiger Vorbereitung auf technische Hochschulen dienen sollten. Die zweite Partei betonte für die bestehenden Realanstalten mit Lateinbetrieb die historische Notwendigkeit des Gewordenen. Nur sollte noch mehr der allgemeinbildende Charakter dieser Anstalten hervorgehoben werden; daher vielfach die Forderung, das Latein an ihnen weiter zu verstärken. Gleichwohl wollte man aber, ebenso wie die erstgenannte Partei, das Gymnasium als alleinigen Träger aller Vorrechte erhalten wissen. Die dritte Partei endlich, eine Minderheit, stimmte der zweiten insoweit zu, als es sich um die reinliche Scheidung des gymnasialen und des realistischen Schultypus handelte. Sie forderte indessen entschieden die Gleichberechtigung; die 1870 offiziell gewährte Zulassung der Realabiturienten zum Universitätsstudium der Mathematik, Naturwissenschaften und neueren Sprachen verlange historisch konsequent die Weiterentwicklung in der eingeschlagenen Richtung. Daß viele Vertreter dieser Partei auf den Realanstalten das Latein zu verstärken wünschten, war eine ihnen aufgenötigte Politik, um freieren Zugang zur Universität zu gewinnen. Im übrigen waren aber auch die Vertreter eines streng durchgeführten Einheitsschultypus nicht eben zahlreich. Man kam meistenteils darauf zurück, daß man nur einen gemeinsamen Unterbau für den gymnasialen und realistischen Typus verlangte; man wollte sozusagen den bestehenden Unterbau der Volks- oder Elementarschulen (7. bis 10. Lebensjahr) einige Jahre weiter hinaufführen.

Wie haben die sich so entgegenstehenden Tendenzen gewirkt? was ist zur Realität durchgedrungen? Einen wirklichen Einheits-

typus der höheren Schule zu schaffen, dieser Gedanke trug keine Möglichkeit der Verwirklichung in sich. Man mochte keinen Bestandteil der bisherigen Schulbildung fallen lassen, und die Überbürdungsklage wollte ohnehin nicht verstummen. Alle Unterrichtsfächer hätten einen enzyklopädischen Charakter annehmen müssen, und die Gründlichkeit hätte stark gelitten, deren man doch nicht entraten mag. Was in erster Linie den Forderungen der Zeit entsprach, das geschah: in die Reihe der höheren Lehranstalten traten neunklassige lateinlose Realschulen, welche (aus den früheren „höheren Gewerbeschulen“ hervorgegangen) 1878 die Berechtigung erhielten, ihre Abiturienten zur technischen Hochschule zu entlassen, und 1879 in die Verwaltung des Ministeriums übernommen wurden. Es war eben der Schultypus, wie ihn die erstgenannte jener drei Parteien allein neben dem Gymnasium mit neunjährigem Kurs hatte gelten lassen wollen. Von der Existenz dieser neuen Anstalten, deren Anzahl zunächst nur gering war, ging dann ein bestimmender Einfluß auf die weitere Entwicklung aus. Zwischen ihnen aber und dem Gymnasium blieb die frühere Realschule erster Ordnung bestehen, sie erhielt jetzt den Namen „Realgymnasium“; der neue Realschultypus wurde „Oberrealschule“ genannt. Das ist die äußere Form des höheren Schulwesens, wie sie von da an sozusagen als Axiom gilt und die zuerst mit den neuen Lehrplänen von 1882 festgelegt wurde. Diese Lehrpläne bedeuteten den Versuch eines Kompromisses zwischen den Forderungen jener drei Parteien: Die verschiedenen Schultypen blieben unvermischt nebeneinander erhalten, auch wurde der gemeinsame Unterbau nicht durchgeführt; wohl aber suchte man Gymnasium und Realgymnasium einander zu nähern, indem man dort den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, hier das Latein vermehrte; in der Berechtigungsfrage wurden den Realanstalten vorderhand keine Zugeständnisse gemacht. —

Ehe wir jetzt darauf eingehen, was die Lehrpläne von 1882 für den mathematischen Unterricht bedeuteten, muß ich noch einmal ausholen und etwas von der Entwicklung an den Hochschulen einschalten. Wir hatten in der vorigen Periode gesehen, wie die Entlastung der vierten Fakultät von ihrer alten Aufgabe, den Theologen, Juristen und Medizinern eine allgemeine Vorbildung zu geben, auf einen vertieften spezialistischen Betrieb ihrer Einzelwissenschaften hinwirkte und wie dies dadurch verstärkt wurde, daß die Tendenz der Zeit auf eine gründliche wissenschaftliche Lehrerbildung hinging [Seite 82]. In der hier betrachteten Periode nimmt dieser Prozeß einen beschleunigten Fortgang. Die neue Ordnung des Lehramtsexamens von 1866 kam durch Mannigfaltigkeit der zur Auswahl gestellten Prüfungsfächer dem Streben nach Individualisierung der Studien entgegen. Freilich wurde

nunmehr daneben der Nachweis „allgemeiner Bildung“ verlangt, aber das zeigt gerade, worauf man andrerseits hauptsächlichen Wert legte. Der Strom der Lehramtskandidaten — seit dem politischen Aufschwung von 1866 und 1870/71 nahm die Frequenz außerordentlich zu — drängte jetzt in das hohe Fachstudium. Es bildete sich das System heraus, daß sich an der Universität jeder werdende Lehramtskandidat weitgehend spezialistisch vertiefen mußte. Die genannte Prüfungsordnung verlangte z. B. in der Mathematik, daß der Kandidat „in die höhere Geometrie, die höhere Analysis und analytische Mechanik soweit eingedrungen sei, um auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen zu können“.

Mit dem rapiden Fortschreiten der Wissenschaft begann nun eine nicht zu verkennende Entfremdung zwischen Schule und Hochschule; der neue gesteigerte Studienbetrieb an der Universität sollte sie immer mehr verstärken. Die Lehrer, die während ihrer Studienzeit oft wissenschaftlich gearbeitet hatten, konnten hernach im Schuldienst meistens keine engere Fühlung mit der weitereilenden Wissenschaft behalten. Während in der vorhergehenden Periode eine größere Zahl der hervorragendsten Forscher unserer Wissenschaft (ich brauche Ihnen nur *Kummer*, *Plücker*, *Steiner*, *Weierstraß* zu nennen) von der Schule zum akademischen Lehrberuf übergingen, wurde jetzt diese Erscheinung nach und nach seltener. Bezeichnend für das Verhältnis von Schule und Hochschule ist auch, daß die Durchsicht der Abiturientenaufgaben der Provinz durch die Professoren der betreffenden Universität, jedenfalls was die mathematischen Aufgaben angeht, seit der Mitte der siebziger Jahre mit Zustimmung beider Parteien wegfiel.

Auf den Lehrstoff der Schule hat diese Entfremdung einen bemerkenswerten Einfluß ausgeübt. Der normale Entwicklungsgang, meine Herren, ist in der Wissenschaft der, daß höhere und schwierigere Teile nach und nach durch zunehmende Klärung der Begriffe und durch vereinfachte Darstellung elementarer werden („Gesetz der historischen Verschiebung“). Aufgabe der Schule ist dann, zu sehen, ob etwa aus Allgemeinbildungsrücksichten die Aufnahme des elementarisierten Gegenstandes in ihren Unterrichtskurs (unter Ausscheidung vielleicht veralteter Dinge) erforderlich ist oder nicht. In unserer Periode hat dieser notwendige Prozeß gerade auf mathematischem Gebiete deutliche Hemmungen erfahren. Hierfür ist die gesetzliche Fixierung des Schullehrstoffs durch die hauptsächlich von Philologen geleitete Verwaltung mit in Rechnung zu setzen. Vor allem aber ist die erwähnte Tatsache mit schuld, daß Schule und Hochschule allmählich den inneren Konnex verloren. Die hohe Wissenschaft, in die der Lehramtskandidat vielfach in einseitiger Weise an

der Hochschule eingeführt war, konnte für ihn im späteren Beruf stofflich keine Bedeutung haben. Das Schulpensum sonderte sich strenger von der Hochschulwissenschaft und verfiel einer gewissen Erstarrung, welche die Idee entstehen ließ, es gäbe einen ewig unveränderlichen Kanon der Schulmathematik.

Andrerseits steht jene Divergenz auch in enger Beziehung dazu, daß sich um diese Zeit die Schule im Gegensatz zur Hochschule mit erhöhtem Interesse der Frage der Lehrmethode zuwendet. Die großen pädagogischen Anregungen, die im Anfang des 19. Jahrhunderts von *Pestalozzi* und *Herbart* ausgingen, hatten in der vorigen Periode fast nur auf das Elementarschulwesen gewirkt. An den höheren Schulen sah die Verwaltung mehr auf Wissenschaftlichkeit als auf Methodik. In *Karl Schellbach* (1804 bis 1892) erstand inzwischen ein Mathematiker, der besonders nach pädagogischer Seite hervorragende Fähigkeiten besaß. In seiner langen Schultätigkeit zu Berlin (seit 1834) — später besonders auch als Mitglied der Prüfungskommission für Lehramtskandidaten und als Leiter des von ihm gegründeten mathematisch-pädagogischen Seminars — hat er einen großen Einfluß auf die Ausgestaltung der Methoden des mathematischen Unterrichts ausgeübt. Anfang der siebziger Jahre war seine wesentlich heuristische Unterrichtsart in einem größeren Kreise von Lehrern höherer Schulen schon verbreitet.

Mit der Steigerung des nationalen Bewußtseins trat jetzt aber, wie wir gesehen haben, auch das Bedürfnis nach allgemeinen Schulreformen lebhaft hervor. Nachdem das Volksschulwesen durch die Bestimmungen von 1872 in erneuter Anknüpfung an die Traditionen von *Pestalozzi* und *Herbart* neu fundiert worden war, ging man an das höhere Schulwesen; und dabei wurden nun auch hier jene pädagogischen und methodischen Ideen lebendig. Als Vorbild konnten in mancher Beziehung die Verhältnisse in Österreich dienen, wo 1849 *F. Exner* (1802 bis 1853) und *H. Bonitz* (1814 bis 1888), letzterer von Fach Altphilologe, ersterer Philosoph von *Herbart*scher Richtung, beides hervorragende Organisatoren, in gemeinsamer Arbeit unter Berücksichtigung *Pestalozzi-Herbart*scher Prinzipien eine Neuorganisation des höheren Unterrichtswesens geschaffen hatten. Zu bemerken ist noch, daß dann *Bonitz*, nach Preußen zurückgekehrt, auf der Schulkonferenz von 1873 eine hervorragende Rolle spielte, 1875 an *Wieses* Stelle ins Ministerium trat und dort der Ausarbeiter der Lehrpläne von 1882 werden sollte. —

Was nun den mathematischen Unterricht in diesen Lehrplänen von 1882 angeht, so waren wiegesagt Gymnasium und Realgymnasium einander angeglichen worden; dort wurde die Mathematik um zwei Stunden vermehrt, hier um drei Stunden vermindert.

Dies ist aber nicht etwa so zu verstehen, daß die beiden Anstalten nun innerlich einem Einheitsziel genähert worden wären, welches zwischen einer spezifisch gymnasial-humanistischen und einer spezifisch realistischen Bildung die Mitte hielt. Sondern das Gymnasium behielt im mathematischen Unterricht nach oben hin ganz seinen Charakter; die zwei hinzugekommenen Stunden wurden dazu verwendet, um auf den unteren Klassen dem eigentlichen Lehrgang, der im wesentlichen ungeändert blieb, einen geometrisch-propädeutischen Kurs zur methodischen Ausbildung der Raumanschauung (*Pestalozzi*) vorauszuschicken.

Das Realgymnasium dagegen wurde stark in Richtung nach dem Gymnasium hin modifiziert. Die angewandte Mathematik wurde sehr beschnitten; man beschränkte das praktische Rechnen, das zuvor bis Oberprima gegangen war, auf die unteren Klassen. Das höhere Lehrziel, das die Anstalten gegenüber den Gymnasien besaßen — sie hatten jetzt immerhin noch zehn Stunden Mathematik mehr als jene — wurde dahin abgeändert, daß man ihnen die zuvor wenigstens erlaubte Differential- und Integralrechnung sowie analytische Geometrie des Raumes untersagte; die Elemente der Reihenlehre wurden ihnen gelassen, dazu erhielten sie die synthetische Geometrie und die sphärische Trigonometrie. Sie erkennen, meine Herren, die geradezu ängstliche Tendenz der Reformatoren, alles was ihnen irgend nach sogenannter Fachbildung aussah, zu beseitigen. Der allgemeinbildende Wert gerade der Infinitesimalrechnungsmethoden wurde immer in merkwürdiger Einseitigkeit verkannt.

Den Oberrealschulen, deren Unterrichtskursus ja zum ersten Mal und mehr versuchsweise festgelegt wurde, gestattete man vorderhand die Differential- (nicht die Integral-)rechnung und die analytische Geometrie des Raumes und fügte ihrem Lehrplan, der fünfzehn Stunden mehr Mathematik aufwies als das Gymnasium, ebenfalls synthetische Geometrie und sphärische Trigonometrie ein. Man warnte diese Anstalten aber ausdrücklich vor der Gefahr, durch „überwiegende Hingabe an die mathematisch-naturwissenschaftliche Seite des Unterrichts den Charakter von Fachschulen anzunehmen“. Das kennzeichnet die schwankende Haltung, die man zunächst dem Oberrealschulwesen gegenüber einnahm. —

Fortsetzung.

(Letztes Drittel des 19. Jahrhunderts: von 1882 bis 1901.)

Lassen Sie uns nun rasch die Entwicklung bis zur neuesten Zeit verfolgen. Die Lehrpläne von 1892 will ich dabei nur kurz berühren, um hernach die Schulreform von 1900 und die heute amtlich gültigen Lehrpläne von 1901 genauer zu besprechen.

Die Lehrpläne von 1882, meine Herren, befriedigten niemanden recht. Die Ansprüche an die Leistungsfähigkeit erschienen erhöht, die äußere Überbürdung wurde immer drückender; die Freunde des Gymnasiums empfanden die Einschränkung der alten Sprachen als eine große Niederlage, die Realschulmänner hatten umsonst auf vermehrte Berechtigungen gehofft. Die Entwicklung vollzog sich nun zunächst unter dem Zeichen des Schulkriegs weiter. Dem Fortschreiten der Naturwissenschaft und Technik gemäß und den Interessen des modernen Lebens entsprechend mußte das realistische Unterrichtswesen immer mehr erstarken. In den achtziger Jahren begannen auch zahlreiche Naturforscher und Mediziner den Wert einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung, wie sie die Realanstalten vermittelten, zu betonen. Inzwischen machte der Realschulmännerverein weiter für das Realgymnasium Propaganda. Jetzt trat ein Verein für lateinlose höhere Schulen hinzu, der für die Interessen der Oberrealschulen agitierte.

Entscheidend war zunächst, daß sich in dieser Zeit die Extreme, das Gymnasium und die Oberrealschule, beide gegen das Realgymnasium wandten. Das Gymnasium wollte diesem gegenüber seine alten Vorrechte trotz der Assimilation nicht aufgeben und beharrte vielfach auf der Idee der gymnasialen Einheitsbildung; die Oberrealschulen erschienen ihm als Konkurrenten ungefährlich, denn daß diese auch einmal die volle Gleichberechtigung würden fordern können, daran dachte vorerst noch niemand. Die Oberrealschule selbst aber vermeinte durch Zurückdrängung des Realgymnasiums sich selbst freier entwickeln zu können. Das Gymnasium schwächte sich durch sein Allesseinwollen weiter; es mußte zu Beginn der neu einberufenen Schulkonferenz von 1890 von allerhöchster Stelle ein hartes Urteil hören. Die Oberrealschule setzte sich gleichzeitig soweit durch, daß ihre Abiturienten (1890) die Berechtigung zum Universitätsstudium der Mathematik und Naturwissenschaften erhielten. Dem Realgymnasium dagegen wurde von jener Schulkonferenz, die allerdings wohl nicht allseitig genug zusammengesetzt war, geradezu die Existenzberechtigung abgesprochen. Nun, meine Herren, das Realgymnasium hat sich dennoch als eine mit historischer Berechtigung entstandene Anstalt behauptet. Die Lehrpläne von 1892 ordneten erneut den Unterricht der drei höheren Schulen nebeneinander.

Nach diesen Plänen blieb am Gymnasium, während die alten Sprachen wiederum stark reduziert wurden, die Mathematik ziemlich ungeändert. Die Realanstalten erkauften indessen sozusagen die Zunahme ihres Ansehens damit, daß man ihren mathematischen Unterricht noch mehr dem des Gymnasiums anähnelte. Beiden wurden zwei Stunden Mathematik genommen und ihr Lehrziel in

diesem Fach verkürzt. Am Realgymnasium blieb von der Reihenlehre obligatorisch nur die Behandlung des binomischen Satzes für beliebige Exponenten. Den Oberrealschulen verbot man nun auch die Differentialrechnung und die analytische Geometrie des Raumes und ließ dafür die Gleichungen vierten Grades zu; verlangt wurde überdies noch die „elementare“ Behandlung der Maxima und Minima, sowie die wichtigsten Reihen der algebraischen Analysis. So war die als Fachkenntnis gebrandmarkte Differentialrechnung amtlich aus allen drei höheren Schulen verdrängt. Für die Realanstalten war damit ein Lehrziel zustande gekommen, das über das Gymnasium in kaum etwas Wichtigerem hinausging, — wenigstens in nichts, was dem Abiturienten weiterhin hätte von besonderem Nutzen sein können. Das Plus an Lehrstunden sollte mehr einer breiteren Behandlung desselben Stoffes zugute kommen, zielte also gewissermaßen auf eine gründlichere formale Durchbildung ab. Nur darin wurde am Gymnasium ein Versuch gemacht, den traditionellen Lehrstoff zeitgemäß ein wenig zu erneuern, und man kam darin dem Wunsche zahlreicher Fachleute nach: Man ließ Kettenbrüche und diophantische Gleichungen fallen und nahm dafür als Gipfel des Oberprimapensums den Koordinatenbegriff und die Hauptlehren der Kegelschnitte auf. An den Realanstalten bildete eine ausgedehntere analytische Geometrie der Ebene wie früher den Abschluß des Ganzen. —

Mit dem Beginn der neunziger Jahre setzt nun eine Bewegung ein, welche die Tendenz unserer ganzen Periode auf ein Durchdringen des realistischen Unterrichtswesens in eine glücklichere Bahn führen sollte. Sie knüpft daran an, daß in den vorhergehenden Jahrzehnten die Beziehungen der reinen zur angewandten Mathematik immer mehr geschwunden waren. Wir haben ja gesehen, wie sich dieser Prozeß am Gymnasium hauptsächlich in der vorigen Periode, an den Realanstalten in dem bisher betrachteten Teile der jetzigen Periode vollzog. Aber das wachsende Interesse an den Naturwissenschaften in weitesten Kreisen und die steigende Wichtigkeit der Technik mußte jetzt endlich zu einer Gegenwirkung führen. In dem eben gegründeten „Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften“ fanden die Wünsche der Naturforscher zuerst ihre Formulierung; ihre „Braunschweiger Beschlüsse“ von 1891 wiesen mit Nachdruck auf die Notwendigkeit hin, die Mathematik an der Schule, unbeschadet ihrer vollen Selbständigkeit, wieder in innige Beziehung mit den Anwendungsgebieten zu setzen. Mit der 1895 hervortretenden sogenannten Ingenieurbewegung (*A. Riedler*) verschärfte sich die Kritik an dem bestehenden mathematischen Unterrichtsbetrieb, nicht minder dem der Universitäten als dem der höheren Schulen.

Dies mußte zugleich die Frage nach der zweckmäßigen Ausbildung der Lehramtskandidaten von neuem in Fluß bringen. Die Forderung von 1866, daß der Kandidat selbständige wissenschaftliche Untersuchungen mit Erfolg sollte anstellen können, war in der Ordnung des Lehramtsexamens von 1887 als unhaltbar aufgegeben worden und dahin reduziert, daß man nur noch die selbständige Bearbeitung einer nicht zu schweren Aufgabe aus den betreffenden Gebieten verlangte; jetzt verdichteten sich die Klagen dahin, daß die Universitätsausbildung viel zu sehr die Anwendungen, ja überhaupt die Bedürfnisse des späteren Berufs vernachlässige. Aber die Forderungen, die nun von außen herantraten, waren im engeren Kreise auch bereits erwogen und vielfach schon nach Möglichkeit berücksichtigt worden. Und so ist die allseitige Sorge für die Ausbildung der Lehramtskandidaten — eine wissenschaftlich vertiefte, aber nicht einseitig unzweckmäßige Ausbildung — eine Losung geworden, unter der sich der Universitätsbetrieb seitdem allmählich umgestaltet. Hier und dort sind Vorlesungen üblich geworden, welche Teile des mathematischen Schullehrstoffs und anschließende Fragen vom höheren Standpunkt betrachten, sei es in Rücksicht auf die historische oder die logische oder die psychologische Seite des Gegenstandes. Andrerseits aber sind an manchen Orten wie besonders bei uns in Göttingen Einrichtungen entstanden, die einem ausgedehnteren Betrieb der angewandten Mathematik dienen. Und die neue Ordnung der Lehramtsprüfung von 1898, die gegenwärtig gilt, hat darin jenen Tendenzen eine feste Stütze gegeben. Sie hat die „angewandte Mathematik“ als eine besondere Lehrbefähigung eingeführt, für die sie vom Examinanden verlangt: Kenntnis der darstellenden Geometrie bis zur Lehre von der Zentralprojektion einschließlich und entsprechende Fertigkeit im Zeichnen; Bekanntschaft mit den mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere der graphischen Statik, mit der niederen Geodäsie und den Elementen der höheren Geodäsie nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

Wie aber spiegelt sich der Einfluß dieser Bestrebungen in der neuesten Entwicklung des höheren Schulwesens wieder? Nun, wir müssen sagen, die Fülle der neuen Anregungen hat wesentlich mit dahin gewirkt, daß sich eine freiere Auffassung von der Bedeutung und Aufgabe der drei höheren Lehranstalten Bahn gebrochen hat. Inzwischen war auch den speziellen Vorkämpfern des alten Gymnasiums die Wahrheit klar geworden, daß der bisherige Weg notwendig zur Zerstörung des Gymnasiums führen mußte; in der Versammlung des Gymnasialvereins Anfang 1900 wurde beschlossen, den früheren formellen Widerstand gegen die Gleichberechtigung der Real-

anstalten aufzugeben. Auf der bald darauf tagenden neuen Schulkonferenz von 1900, wo sofort eine vielseitigere Zusammensetzung der Teilnehmer hervortrat, herrschte eine durchaus fortschrittliche Stimmung. Von den Verhandlungen will ich hier nicht weiter berichten; Sie können darüber die amtliche Publikation [zitiert Seite 3] einsehen. Der sich anschließende kaiserliche Erlaß vom 26. November 1900, darauf kommt es uns hauptsächlich an, legte das befreiende Prinzip fest, das den Assimilationsvorgang der vorherigen Jahrzehnte zur Umkehr brachte. Der Grundgedanke ist der: es sollen mehrere Typen allgemeinbildender Unterrichtsgänge von verschiedenem spezifischem Charakter nebeneinander stehen — auf der Grundlage voller Gleichwertigkeit! —

Machen wir uns diesen Kernpunkt der Schulreform von 1900 noch ein wenig genauer klar! Wir sind ja nun hiermit in der Gegenwart angelangt, deren eingehenderes Verständnis gerade das Ziel unserer historischen Betrachtung war. Die Idee der „spezifischen Allgemeinbildung", meine Herren, ist dem großen Publikum nur sehr schwer klar zu machen. Vielleicht daß sie zu fein ist, um überall verstanden zu werden und rasch in der Wirklichkeit durchzudringen. Die Worte „spezifisch" und „allgemein" scheinen ja zunächst etwas Widersprechendes zu enthalten, und doch ist es gar nicht so. Man hat sich durch die historische Entwicklung genötigt gesehen, auf das Ideal eines Einheitsunterrichts zu verzichten und muß also verschiedene spezifizierte Lehrgänge nebeneinander gelten lassen. Dabei soll aber eben diese Spezifizierung nicht unter dem Gesichtspunkt geschehen, daß man weitgehende Fachkenntnisse übermitteln will, sondern es soll immer der Gedanke der Allgemeinbildung obenanstehen.

Freilich gehört dazu die Überzeugung, daß es überhaupt verschiedene Allgemeinbildungsstoffe gibt. Und da liegt meistens die Schwierigkeit, wo viele anscheinend nicht zu einer freieren Auffassung der Dinge kommen können. Wenn es heißt, in einer ersten Art Lehrgang solle neben den übrigen Fächern spezifisch der altsprachliche Unterricht ausgestaltet werden, so wird das von vielen Seiten gern anerkannt; dort scheint die Tradition das Urteil fast selbstverständlich gemacht zu haben, daß die alte gymnasiale Bildung einen allgemeinen Charakter besitze. Sagt man dann aber, ein andrer Unterrichtsweg solle etwa ein Lehrziel herausarbeiten, das spezifisch auf neuere Sprachen, auf Mathematik und Naturwissenschaften gegründet ist, so erhebt sich noch immer vielfacher Widerspruch. Insbesondere betreffs der Mathematik und der Naturwissenschaften hört man dann stets wieder den alten Ruf, das sei „Fachbildung". Es scheint in der Tat einigermaßen schwer zu

sein, weite Kreise davon zu überzeugen, daß die mathematisch-naturwissenschaftliche Seite genau so gut wie die altsprachliche oder die neusprachliche ihren wesentlichen Beitrag für die Erziehung zu einer allgemeinen Bildung liefert. Manche wollen nicht einsehen, daß die historische Entwicklung zu einem geänderten Verhältnis der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer geführt hat und führen mußte. Hier ist es eine Aufgabe für den Mathematiker, was der Erlaß von 1900, der Entwicklung nachgebend, als Leitgedanken der Schulreform aufgestellt hat, in seiner vollen Bedeutung zu erkennen und mit Nachdruck zu vertreten.

Was bedeutet es weiter, daß drei Unterrichtsgänge, welche durch die bestehenden drei Typen höherer Schulen realisiert werden, auf der Grundlage der Gleichwertigkeit nebeneinander stehen sollen? Nun, darin liegt enthalten, daß den Schülern bzw. ihren Eltern wirklich eine freie Wahl bleiben soll, für welchen Typus der spezifischen Ausbildung sie sich gegebenenfalls nach Neigung und allgemeinem Lebensplan entscheiden wollen. Mit alten Vorurteilen einer verschiedenen Bewertung des humanistischen und des realistischen Unterrichts ist im Prinzip gebrochen. Damit ist aber zugleich eine Neuordnung des Berechtigungswesens angezeigt. Ausgehend von der Gleichwertigkeit der gymnasialen, realgymnasialen und Oberrealschulbildung gelangt man dahin, daß die Absolventen jedes dieser Lehrgänge zum Eintritt in die verschiedenen Berufe die gleichen formalen Berechtigungen erhalten müssen. Dies schließt allerdings nicht aus, daß für den einzelnen Beruf die eine oder die andre Art der Vorbildung die zweckmäßigere sein kann. Wenn jemand Ingenieur werden will, so wird für ihn ein Unterricht, in dessen Mittelpunkt Mathematik, Naturwissenschaften und neuere Sprachen stehen, eine geeignetere Grundlage abgeben, als ein solcher, der auf die alten Sprachen den Hauptnachdruck legt; ein Theologe, der auf der Universität lateinische, griechische, hebräische Originale kritisch lesen soll, wird durch einen guten altsprachlichen Unterricht zweckmäßiger vorgebildet werden, als durch eine eingehendere Differentialrechnung und dergleichen mehr. Aber das rührt nicht daran, daß die drei Unterrichtswege für die Erziehung zu einer allgemeinen Geistesbildung als gleichwertig anzusehen sind.

Natürlich wird man auf der anderen Seite die Konsequenz ebenso billigen, daß jeweils die Abiturienten, die für ihre späteren Studien die weniger zweckmäßige Vorbildung genossen haben, dann noch ergänzende Vorkurse an der Universität durchmachen müssen. Nur haben diese Ergänzungskurse unbedingt auf allen Gebieten gleichmäßig zu bestehen, damit die Hochschulvorlesungen immer an das Optimum der Vorbildung anschließen können. Dies ist in der Tat

eine ernste Sache. Wollte man verlangen, meine Herren, daß die Hochschule überall nur das gemeinsame Mindestmaß aller Vorkenntnisse voraussetzen dürfte, so würde bei der Spezifizierung des vorbereitenden Unterrichtswesens auf die Dauer zweifelsohne ein Verfall der Hochschulbildung eintreten müssen.

In einem weiteren Punkte läßt das Prinzip von 1900 nach neuerer Auffassung noch verschiedene Möglichkeiten der Durchführung offen. Gegenwärtig werden die drei Unterrichtswege im wesentlichen wiegesagt durch die getrennten drei Typen höherer Schulen, Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule, repräsentiert. Es ist indessen, darauf möchte ich schon vorweg einmal hinweisen, nicht unmöglich, daß die Entwicklung allmählich doch mehr einer gemeinsamen Anstalt mit spezifischen fakultativen Unterrichtsgängen zustrebt. Die Ausbreitung der sogenannten „Reformschulen", von denen ich später noch einiges mehr sagen werde, scheint fast darauf hinzuweisen. Auch in diesem Falle, meine Herren, vermag das allgemeine Prinzip der Schulreform von 1900 durchaus seine Bedeutung zu behaupten! Jedoch ich komme hierauf zurück.

Preußen ging mit diesem Prinzip in entschlossener Weise den übrigen Bundesstaaten voran und hat damit einen entscheidenden Einfluß für die gesamte nun folgende Entwicklung des höheren Schulwesens in Deutschland ausgeübt. Bald (1901/02) kamen in Preußen die ministeriellen Bestimmungen, die den großen äußeren Vorrechten der Gymnasien ziemlich ein Ende machten. Den Abiturienten der Realanstalten wurde die Mehrzahl der Studienlaufbahnen, die ihnen bisher noch verschlossen waren, freigegeben. Ihr Reifezeugnis berechtigt seitdem in gleicher Weise wie das des Gymnasiums für die Zulassung zu den Prüfungen für das höhere Lehramt, für den juristischen und den höheren Verwaltungsdienst. Zum Medizinstudium sind die Oberrealschulabiturienten nun in allerletzter Zeit (1907) ebenfalls zugelassen worden; bei ihnen lag die Schwierigkeit darin, daß die Berechtigung da nicht preußische, sondern Reichsangelegenheit ist. Allein die Theologen verlangen nach wie vor die gymnasiale Vorbildung.

Aber auch in andrer Hinsicht bleibt noch viel zu wünschen übrig. Wir müssen sagen: Das Prinzip von 1900 ist bislang keineswegs vollständig zur Durchführung gelangt. Die große Überzahl der humanistischen gegenüber den Realanstalten beeinträchtigt aufs stärkste die angekündigte Gleichstellung; und während die Philologen eifrig daran sind, die sämtlichen humanistischen Anstalten spezifisch auszugestalten, rühren sich die Realanstalten noch viel zu wenig, daß sie dahin kommen. Ferner ist die Institution der Ergänzungskurse vorderhand nur in einseitiger Weise ausgebaut, wobei

in der Tat die Gymnasiasten wesentlich bevorzugt erscheinen. Dies verstärkt dann wieder die im Publikum ohnehin verbreitete traditionelle Ansicht, daß die Gymnasien doch die eigentlich allein „vornehmen" höheren Schulen seien. Auf diese faktisch ungleiche Stellung komme ich später ebenfalls zurück.

In den revidierten preußischen Lehrplänen von 1901, mit denen wir uns nun weiterhin, speziell hinsichtlich des Mathematikunterrichts, ausführlicher beschäftigen werden, sind ebenfalls die erläuterten Grundideen noch nicht in vollem Maße zur Geltung gekommen. Ich wies schon früher [Seite 21] auf die Diskrepanz zwischen den methodischen Bemerkungen und dem Stichwortschema der Lehrpläne hin. Jene sind in fortschrittlichem Geiste neubearbeitet, dieses trägt mehr traditionellen Charakter. Die Stundenverteilung ist im übrigen für die meisten Fächer ungeändert geblieben, so auch für die Mathematik. Nur das Latein ist am Gymnasium und am Realgymnasium um je sechs Stunden vermehrt worden; am Realgymnasium deshalb, weil sonst die Zulassung der Absolventen zum Medizinstudium auf Widerstand von seiten der übrigen deutschen Bundesstaaten zu stoßen schien. Davon, daß die Eigenart einer jeden der drei Anstalten kräftiger betont werden solle, wie es in dem kaiserlichen Erlaß und auch in den Lehrplänen selber heißt, ist in diesen nicht eben viel zum Ausdruck gekommen. Sie bedeuten mehr einen ersten Schritt, in der durch das Prinzip von 1900 gewiesenen Richtung eine Neugestaltung anzubahnen. —

Von dem so bezeichneten Standpunkt, meine Herren, lassen Sie uns jetzt im folgenden die Lehrpläne des mathematischen Unterrichts, wie sie heute amtlich gelten, näher betrachten. Speziell handelt es sich um die Besprechung der Oberstufe der höheren Schulen; die sechs Unterklassen haben wir ja früher schon vorweggenommen. Ich denke, wir können nun auf Grund einer gewissen Gesamtauffassung Kritik üben, und das soll uns vorderhand im nächsten Abschnitt beschäftigen. Hernach wird dann alles auf Besserungsvorschläge ankommen; denn darin liegt doch unser wichtigstes Ziel: wir müssen sorgen, meine Herren, daß bei der ganzen Entwicklung, die bisher von philologischer Seite viel mehr ausgenutzt wurde, die Mathematik, zugleich mit den arg bedrängten Naturwissenschaften, ihren richtigen Platz erhält!

Fünfter Abschnitt.

Die drei Oberklassen der höheren Schulen nach den Lehrplänen von 1901.

(Mit einem Exkurs über die Frage der Infinitesimalrechnung.)

Wir werden uns hier zunächst darüber zu unterrichten haben, wie an den drei Anstaltsarten die mathematischen Lehrstunden verteilt sind. Indem ich die Zahlen für die sechs Unterklassen noch einmal dazunehme, stelle ich folgendes Schema zusammen:

Mathematik	VI	V	IV	III b	III a	II b	S_u	II a	I b	I a	S_o	$S_u + S_o$
Gymnasium	4	4	4	3 (+1)	3 (+1)	4 (+1)	22 (25)	4	4	4	12	34
Realgymnas.	4	4	4	5	5	5	27	5	5	5	15	42
Oberrealsch.	5	5	6	6	5	5	32	5	5	5	15	47

In den fettumrandeten Kolumnen sind die Partialsummen S_u und S_o der Stunden für die Unter-, bzw. Oberklassen enthalten, während die letzte Kolumne dann die Gesamtsumme $S_u + S_o$ angibt. Die in der Zeile „Gymnasium" für die Klassen Untertertia, Obertertia, Untersekunda in Klammern zugefügte + 1 bezieht sich auf den schon früher [Seite 22 f.] erklärten „Ersatzunterricht".

Lassen Sie uns den Stundenplan für den naturwissenschaftlichen Unterricht, auf den wir nachher ausführlicher zurückkommen, gleich hinzunehmen; wir stellen dafür ein ebensolches Schema auf:

Naturwissenschaften	VI	V	IV	III b	III a	II b	S_u	II a	I b	I a	S_o	$S_u + S_o$
Gymnasium	2	2	2	2	2	2 (+1)	12 (13)	2	2	2	6	18
Realgymnas.	2	2	2	2	2	4	14	5	5	5	15	29
Oberrealsch.	2	2	2	2	4	6	18	6	6	6	18	36

An diesen beiden Tabellen muß das eine sofort auffallen, daß der Unterschied der drei Schularten beim naturwissenschaftlichen Unterricht viel bedeutender ist als in der Mathematik. Dementsprechend pflegt denn in den Naturwissenschaften der Schüler einer Realanstalt auch erheblich mehr zu lernen als ein Gymnasiast. An den Realanstalten werden eben Physik und Chemie viel breiter nebeneinander mit mehr oder minder ausgedehnten praktischen Schülerübungen getrieben; auf den Gymnasien tritt die Chemie fast ganz zurück und die Physik hat dann immer noch eine sehr geringe Stundenzahl. Daß der biologische Unterricht gegenwärtig an den Oberklassen der höheren Schulen (Preußens wie auch fast aller übrigen Bundesstaaten) überhaupt fehlt, habe ich schon zu Beginn meiner Vorträge [Seite 4] hervorgehoben, und darauf beziehen sich ja gerade die heutigen Bestrebungen der Biologen, die wir in der Breslauer Unterrichtskommission mit vertreten. —

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung des mathematischen Lehrstoffs, der für die drei Oberklassen der höheren Schulen vorgesehen ist. Ich betone vorweg, daß ich mich hier nur auf das Stichwortschema der offiziellen Lehrpläne von 1901 beziehen kann. Innerhalb dieser Schranken bleibt allerdings für die Ausgestaltung des Unterrichts im einzelnen noch eine ziemliche Freiheit übrig — und das ist gewiß äußerst erwünscht. Ich will mit diesem Hinweis nur sagen, daß vielleicht an manchen Anstalten durch tüchtige Lehrer schon einzelne und vielleicht weitgehende Änderungen geschaffen sein mögen. Die Kritik, die wir zu geben haben, wird deshalb an Wichtigkeit nicht verlieren. Denn es handelt sich darum, den Ideen, die wir als richtig und fördernd erkannt haben, nun auch allgemeine Anerkennung zu verschaffen!

Die Lehrpläne in der Arithmetik.

Betrachten wir zunächst das Lehrpensum in der „Arithmetik". Das Wort schließt nach dem an unseren Schulen heute herrschenden Sprachgebrauch außer dem gewöhnlichen Buchstabenrechnen auch die Algebra (die Lehre von den Gleichungen) und die Analysis, soweit sie gelehrt wird, ein. — Für die Oberklassen des Gymnasiums haben wir alsdann umstehendes Schema [Seite 102].

Zu diesem tabellarischen Lehrplan für das Gymnasium füge ich gleich das entsprechende Schema für die beiden Arten Realanstalten (Realgymnasium, Oberrealschule); wir können sie zusammen behandeln, da sie sich nicht gerade wesentlich voneinander unterscheiden. An diesen Anstalten tritt gemäß der größeren Zahl von Lehrstunden eine Verschiebung des Gymnasiallehrstoffs nach unten ein, wodurch

Arithmetik: Gymnasium.

Von der Unterstufe her soll bekannt sein:	Wurzeln. Logarithmen. Lineare Gleichungen. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.
II a	Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
I b und I a (im Lehrplan nicht getrennt)	Arithmetische und geometrische Reihen (mit Anwendung auf Zinseszinsrechnung). Kombinatorik (mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitslehre). Binomischer Satz für ganze positive Exponenten. Wiederholender Aufbau der Arithmetik. Gleichungen, die auf quadratische zurückführbar sind.

auf den Oberklassen die Hinzunahme weiterer Lehrgegenstände ermöglicht wird. Wir wollen diese Zugaben durch einen * auszeichnen. Das Schema sieht dann folgendermaßen aus:

Arithmetik: Realgymnasium und Oberrealschule.

Von der Unterstufe her soll bekannt sein:	Wurzeln. Logarithmen. Gleichungen, lineare und quadratische, mit einer und mit mehreren Unbekannten.
II a	Arithmetische und geometrische Reihen (mit Anwendung auf Zinseszinsrechnung). * Imaginäre Größen. * Reziproke und binomische, sowie schwierigere quadratische Gleichungen.
I b und I a (im Lehrplan nicht getrennt)	Kombinatorik (mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitslehre). * Binomischer Lehrsatz für beliebige Exponenten und unendliche Reihen (diese an der Oberrealschule ausführlicher!). Wiederholender Aufbau der Arithmetik. * Kubische Gleichungen. * Maxima und Minima. * An der Oberrealschule eventuell angenäherte Lösung höherer numerischer Gleichungen.

Lassen Sie uns die so skizzierten Lehrpläne für den arithmetischen Unterricht in einer Reihe von Bemerkungen teils erläuternder teils kritischer Art genauer durchgehen. Dabei strebe ich freilich keine systematische Vollständigkeit an; hie und da mögen auch Einzelheiten für später aufgehoben sein.

1. In dem gesamten Lehrstoff waltet in sehr auffallender Weise das Interesse an der formalen Gleichungstheorie vor. Dies ist historisch verständlich aus der Zeit heraus, wo sich die Abneigung gegen die Utilität nach und nach zu dem Erstreben einer rein formalistischen Bildung verschärfte. Heutzutage erscheint dieser Standpunkt indessen überwunden; wir wollen zwar ebenso auf eine allgemeine und auch formale Bildung abzielen, aber das soll uns nicht dahin führen, nun in einseitiger Weise uns festzulegen und möglichst unnütze Dinge zu treiben. Welche Förderung soll am Gymnasium der Arithmetikunterricht der Obersekunda bringen, der lediglich die formale Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu behandeln hat? Und nun erst auf Prima die künstlichen höheren Gleichungen, die so gemacht sind, daß sie sich durch gewisse Kniffe auf quadratische zurückführen lassen. Die höheren Gleichungen, meine Herren, die man in der Physik oder sonst nur irgendwo gebraucht, werden diese wunderbare Eigenschaft meistens nicht haben. Von der angenäherten Auflösung numerischer Gleichungen aber, die praktisch allein Bedeutung hat und zudem viele Anregung gibt, ist nicht die Rede. Nur auf der Oberrealschule dürfen, — d. h. wenn man nicht vorzieht, die Zeit für die Erweiterung des geometrischen Lehrpensums zu verwenden — solche Näherungsmethoden durchgenommen werden. Und wie außerordentlich einfach und dazu lehrreich ist es, wenn man den Schüler ein Polynom vom ersten und zweiten und hernach meinetwegen von höherem Grade im xy-System durch Berechnung einzelner Punkte als Kurve zeichnen und sodann die Nullstellen der Funktion mit größerer oder geringerer Genauigkeit bestimmen läßt!

2. Unter demselben Gesichtspunkt erscheint mir auch die Behandlung der kubischen Gleichungen nach der kardanischen Formel auf der Prima der Realanstalten als wenig geeignet. Es ist ebenfalls ein historischer Überrest aus einer Zeit des begeisterten Formalismus. Wie Sie wissen, ist es mit der Wurzelrealität bei den kubischen Gleichungen eine besondere Sache. Gerade dann, wenn alle drei Wurzeln reell sind, liefert die kardanische Formel diese Werte sämtlich in komplexer Gestalt, und das kann, wie die weitergehende Theorie lehrt, durch keinerlei algebraische Umformungen vermieden werden. Die alten Italiener, die im 16. Jahrhundert in der formalen Auflösung der Gleichungen ihre großen Entdeckungen machten [Seite 68], nannten diesen Fall, weil ihnen keine Zurückführung auf reelle Wurzelausdrücke gelang, den „casus irreducibilis." Diese Betrachtungen sind an sich gewiß sehr interessant; ich werde nicht verfehlen, im zweiten Hauptteil dieser Vorträge darauf sowie auf die entsprechende Lösung der Gleichungen vierten und ebenso auch

fünften Grades etwas einzugehen — eine Sache, die in moderner Form gar nicht so unzugänglich ist, wie man vielfach in Lehrerkreisen noch zu glauben scheint. An dieser Stelle handelt es sich indes um die Frage, ob der Gegenstand auf die Schule gehört.

Von hervorragender Seite ist die Ansicht vertreten worden, die Behandlung der kardanischen Formel eigne sich in der Tat sehr für die Schule. Sie bilde gewissermaßen die Krönung für die Lehre von den komplexen Zahlen, da sie gerade im casus irreducibilis von der Unumgänglichkeit des Imaginären auch bei reellen Problemen überzeuge. Diesem Urteil, meine Herren, kann ich nicht beipflichten; der Schüler muß diese Unmöglichkeit doch schließlich der Autorität des Lehrers glauben! Ich möchte vielmehr dafür halten, daß die kardanische Formel für die Schule zu schwer ist, um von der Mehrzahl der Schüler gehörig begriffen zu werden. Andrerseits aber scheint sie mir im Schulunterricht auch entbehrlich, insofern in dem ganzen Denkbereich der elementaren Mathematik und ihrer Anwendungen gerade nicht die formal-algebraische Auflösung der Gleichungen dritten Grades das Wesentliche ist, sondern die approximative Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen überhaupt*).

3. Die Lehre von den Kombinationen, die gegenwärtig für alle Anstalten auf Prima vorgeschrieben ist, stellt seit langem ein Kampfobjekt dar. Nun, aus dem vorhergehenden ist klar, daß wir eine ausführliche formale Kombinatorik [man vergleiche Seite 69] gewiß als unzeitgemäß ablehnen müssen. Am Gymnasium ist es übrigens auch so, daß nur die „Grundlehren“ gewünscht werden. Ich möchte hier den Standpunkt vertreten, daß es immer darauf ankommen soll, ob die zur Verfügung stehende Zeit eine förderliche Behandlung der Kombinatorik wirklich gestattet oder nicht. Es wird sicher manchmal Bedenken haben, auf der Prima noch ein neues Gebiet zu betreten, das einen so andersartigen Charakter hat als die übrige Schularithmetik. Wenn man aber zur Kombinatorik kommt, dann soll man sie nicht um einiger Spielereien wegen bringen, sondern wenigstens kurz die Anwendungen auf Wahrscheinlichkeitsrechnung besprechen, weil das eine gewisse philosophische Bedeutung hat.

An die Kombinatorik pflegt man auch den binomischen Satz für positive ganze Exponenten anzuschließen, indem man ihn mittels einiger einfacher kombinatorischer Formeln durch Schluß von n auf $n+1$ beweist. Dieser Satz ist, wenn wir ihn auch nicht (wie das Stichwortschema des Gymnasiallehrplans die Meinung erwecken könnte) geradezu als Krone des arithmetischen Unterrichts

*) Übrigens entspricht, wie ich beiläufig bemerken will, die graphische Behandlung der kubischen Gleichungen ganz dem Ansatz der antiken Geometer.

anerkennen möchten, doch eine sehr wichtige formale Relation, zudem der Schüler bei ihrer Herleitung den Schluß der vollständigen Induktion kennen lernt.

Ganz anders ist indes unsere Stellung zu dem allgemeinen binomischen Satz, der nach dem Lehrplan den Realanstalten vorbehalten ist. Wie wird dort dieser binomische Satz für „beliebigen", d. h. nicht mehr bloß positiven ganzen Exponenten traktiert? Sie wissen, meine Herren, das führt in die Betrachtung der unendlichen Reihen hinein, und damit beginnt nun an den Schulen meist das alte Elend der algebraischen Analysis. Wir werden von dieser Sache weiterhin ausführlicher reden; hier sei nur soviel gesagt, daß die exakte Behandlung des binomischen Satzes für „beliebige" Exponenten ziemlich mühsam und in allen Feinheiten für die Schule recht ungeeignet ist. Soll vom binomischen Satz überhaupt gesprochen werden, so dürfte am wichtigsten sein, daß die zentrale Idee zur Geltung kommt, das ist: die Möglichkeit, eine Funktion mittels einer Reihenentwicklung zu approximieren. Unter diesem Gesichtspunkt könnte man sogar wünschen, daß auf allen höheren Schulen der binomische Satz als gelegentliches Beispiel beim Zeichnen der Funktionen herangezogen wird, wobei der Schüler die Überzeugung von der Richtigkeit und der Tragweite des Satzes im wesentlichen experimentell an seinen Figuren gewinnt. Am Gymnasium allerdings wird man wohl nur mit einer besonders guten Klasse einmal soweit gehen. An der Oberrealschule indessen möchte ich sehr gerade diese Behandlung des allgemeinen binomischen Satzes befürworten. Unter allen Umständen vermeide man es, eine Überlegung als Beweis auszugeben, wenn sie das in keiner Weise ist. Doch davon wiegesagt später mehr. —

4. Ebenfalls nur für die Realanstalten ist die Lehre von den Maxima und Minima vorgeschrieben. Wie ich in unserem historischen Abschnitt schon andeutete, haben wir darin den Rest zu sehen, der bei der Schulreform der letzten Jahrzehnte von der Infinitesimalrechnung allein übrig geblieben ist. — Dieses Kapitel von den Maxima und Minima, meine Herren, das sind Aufgaben, die vortrefflich geeignet sind, den Lernenden mit der Idee der Veränderlichkeit von Buchstabenausdrücken wie von geometrischen Gebilden vollständig vertraut zu machen; hier treten der Funktionsbegriff, die graphische Darstellung und die Elemente der Infinitesimalrechnung so recht in ihrer großen Bedeutung hervor. In der Tat pflegt der Schüler diesem Gegenstand von Hause aus ein besonderes Interesse entgegenzubringen. Und unmittelbar verständliche und naheliegende Fragestellungen fesseln seine Aufmerksamkeit von Anbeginn.

Was hat nun hier unsere Kritik zu sagen? Ich erinnere Sie zunächst noch einmal daran, daß wir schon bei Besprechung der sechs

Unterklassen [Seite 34, 37] feststellten, daß der so wichtige Funktionsbegriff in geometrisch-anschaulicher Form von Obertertia an die zentrale Idee des mathematischen Unterrichts bilden müßte. Von da aus ergibt sich von selbst, daß wir die Lehre von den Maxima und Minima nicht erst in der obersten Klasse als ein für sich abgeschlossenes Gebiet wünschen können; sondern Aufgaben dieser Art wird man als willkommene Übungsbeispiele bei einfachen Kurvendiskussionen bereits auf früherer Stufe mit Vorteil einstreuen, womit freilich eine gelegentliche Zusammenfassung auf den Oberklassen nicht für unzweckmäßig erklärt sein soll. All dies aber wird natürlich schon für das Gymnasium volle Geltung haben. Denn, wie wir die Sache auffassen, würde es sich dort nach dem Gesagten ja keineswegs um die Anfügung eines neuen fremdartigen Gebietes an das übrige Pensum handeln, sondern um die nächstliegende, fast selbstverständliche Ausgestaltung desjenigen Lehrstoffs, den wir ohnehin für den geeigneten halten.

Überlegen wir uns aber dieses noch: Wie wird gegenwärtig an den höheren Schulen, an den Realanstalten obligatorisch, an den Gymnasien als anscheinend nicht seltene Erweiterung des vorgeschriebenen Lehrstoffs, die Lehre von den Maxima und Minima betrieben? Ich halte mich dabei an die verbreiteten Schulbücher und zitiere aus dem bereits früher [Seite 26] genannten „Unterrichtswerk" von *Heinrich Müller*-Charlottenburg. Da heißt es denn bei der Bestimmung der Extrema einer Funktion $y = f(x)$ wörtlich so*): „Verfahren nach *Schellbach*. Man bildet die Differenz $y - y'$ oder $f(x) - f(x')$, dividiert durch $x - x'$, läßt in dem Quotienten $x' = x$ werden, setzt den hierdurch entstehenden Ausdruck $f'(x)$ gleich null und löst die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auf." Sie sehen, meine Herren, es wird ohne Bedenken die Differentialrechnung hereingezogen, nur der Name „differenzieren" und das Symbol $\frac{dy}{dx}$ wird vermieden, und — *Schellbach* zum Vater der ganzen Rechnungsweise gemacht. Nach persönlicher Erfahrung kann ich bestätigen, daß an vielen Anstalten tatsächlich so unterrichtet wird. Im übrigen hat es damit eine besondere Bewandtnis. Ich habe von *Karl Schellbach* als hervorragendem mathematischen Pädagogen Ihnen in unserem historischen Abschnitt schon gesprochen [Seite 91]. Es bleibt hier einiges hinzuzufügen.

Schellbach bildete lange Jahre hindurch als Lehrer am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium zu Berlin und als Leiter seines mathematisch-pädagogischen Seminars für Lehramtskandidaten den Mittelpunkt eines gesteigerten mathematischen Schulunterrichts, und man kann sagen,

*) Ausgabe A, Teil II, Seite 85; B, Teil II 1, Seite 99. Beide in 2. Auflage, Leipzig (Teubner) 1902.

sein Einfluß auf das gesamte mathematische Bildungswesen wirkt noch heute nach. Aus *Schellbachs* Kreise sind nicht nur die bedeutendsten Schulmänner Norddeutschlands hervorgegangen, sondern auch ein großer Teil der Hochschullehrer unserer Zeit waren Schüler seines Seminars; ich führe z. B. an: *H. Bruns, G. Cantor, A. Clebsch, L. Fuchs, L. Königsberger, E. Netto, C. Neumann, A. Schoenflies, H. A. Schwarz.* Die besondere Wirkung von *Schellbachs* Unterricht scheint, soweit dem Fernerstehenden ein Urteil erlaubt ist, darin bestanden zu haben: er erzog den Schüler dazu, die Bedeutung der Mathematik für die Verhältnisse der eignen Umgebung richtig aufzufassen und innerhalb der ganzen Gedankenwelt beständig vor Augen zu behalten. Das steht, wie Sie sehen, unserer heutigen Auffassung überaus nahe. Freilich werden wir die Anwendungen auf technische Gebiete sowie das Interesse für das geometrische Zeichnen vermissen. Dafür aber spielen die naturwissenschaftlichen Anwendungen bei ihm eine um so größere Rolle; er weist unausgesetzt auf die Wichtigkeit des mathematischen Denkens und Wissens für das Verständnis der Natur hin. Auch betont er überall die enge Beziehung der Mathematik zu den Verhältnissen des menschlichen Lebens (Fragen der Statistik, Zinseszinsrechnung usw.).

Aus zwei kleinen Schriften können Sie Kenntnis nehmen von der rückhaltlosen Hingabe, mit der *Schellbach* für seine Grundanschauungen eintrat. Das ist einmal sein Schulprogramm von 1866: Über den Inhalt und die Bedeutung des mathematischen und physikalischen Unterrichts auf unseren Gymnasien*), worin er auf das lebhafteste die Bedeutung des induktiven Elements im Physikunterricht und der folgenden deduktiven Bearbeitung durch die Mathematik hervorhob; und andrerseits seine Rede von 1887: Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien**). Die letztere Schrift ist ein begeisterter Hymnus auf den Wert der Mathematik für den Unterricht und für das Leben; doch klingt eine traurige Grundstimmung durch, — Trauer über die vermeintlich bevorstehende Verflachung infolge der Überfüllung des Lehrerberufs, insbesondere von den Realanstalten her, mit denen sich der alte *Schellbach* nicht mehr hat befreunden können. Ein farbenreicheres Bild von dem Leben dieses Mannes, als ich es Ihnen hier zu geben vermag, finden Sie in einer Schrift, die *Felix Müller* zur Hundertjahrfeier des Geburtstags seines einstigen Lehrers veröffentlicht hat: *Karl Schellbach*, Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben[0]).

*) Schulprogramm 1866 (Friedrich-Wilhelm-Gymnasium zu Berlin), dann in 2. Auflage, Berlin (Meyer & Müller) 1893.

**) Berlin (Reimer) 1887.

[0]) Leipzig (Teubner) 1905; abgedruckt im 20. Heft der „Abhandlungen zur

Schellbach, meine Herren, hat sich in seinem Feuereifer niemals peinlich an die Umgrenzung des Schullehrstoffs durch die amtlichen Vorschriften gehalten. Das gilt wohl vornehmlich in der Frage der Infinitesimalrechnung, deren Elemente er, wie er es für richtig hielt, im Grunde immer an der Schule unterrichtet hat. Charakteristisch ist in dieser Hinsicht der Leitfaden von *F. G. Mehler*, der direkt aus dem Eindruck der Unterrichtstätigkeit *Schellbachs* hervorgegangen ist: Hauptsätze der Elementarmathematik, zum Gebrauch an Gymnasien und Realgymnasien*). In diesem knappgefaßten Buch, das besonders an den höheren Schulen des östlichen Deutschlands auch gegenwärtig noch viel gebraucht wird, interessieren uns hier am meisten die Schlußseiten (197 bis 204), wo unter dem — unverfänglichen Titel „Anhang" die Grundzüge der Infinitesimalrechnung zur Entwicklung kommen. Da werden die Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung definiert, und zwar als wirkliche Grenzwerte, dann die Lehre vom ersten und zweiten Differentialquotienten kurz entwickelt und auf die approximative Lösung numerischer Gleichungen sowie die Aufgaben der Maxima und Minima angewendet; schließlich wird an der Quadratur der Parabel und Ellipse der fundamentale Gedanke der Integralrechnung herangebracht. Bei alledem werden aber die in der Wissenschaft gebräuchlichen Namen „Differentialquotient, Integral" und Symbole „$\frac{dy}{dx}$, $\int y\,dx$" durchweg vermieden. Durch diesen Kunstgriff — so fasse ich es auf — beseitigte *Schellbach* die Gefahr einer Einsprache von oben her. Es war zwar bekannt, daß er wesentlich über das vorgeschriebene Pensum hinausging. Aber eine systematische Infinitesimalrechnung auf der Schule zu treiben, daß wäre ihm vielleicht doch verboten worden.

Also die Sache wurde gebracht, nur der übliche Name abgeschafft. So machte es *Schellbach*, und so machten es, als in weiten Kreisen die Stimmung gegen die Infinitesimalrechnung eine feindlichere wurde, seine Schüler. War es mehr Pietät, war es mehr Klugheit, wenn sie den Namen „*Schellbach*sche Methode" erfanden, — ich will es nicht entscheiden. Jedenfalls ist bei uns auf diese Weise von einzelnen Lehrern eine verkappte Infinitesimalrechnung — so möchte ichs nennen — besonders bei der Behandlung der Maxima und Minima schon lange betrieben worden. Man kehrte es nur nicht nach außen hervor, da man ja trotz der bestehenden Vorschriften den Kern der Sache doch bringen konnte.

Geschichte der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen" (begründet von *Moritz Cantor*, erschienen in Leipzig (Teubner) seit 1877), 1905, Seite 1—86.

*) Berlin (Reimer) 1859; 22. Auflage, ebenda 1901.

Ich muß Sie indes auf die Nachteile des ganzen Verfahrens aufmerksam machen. Bringt man Sachen aus der Infinitesimalrechnung auf der Schule in einer neu erfundenen Bezeichnung, so hat man ganz unnützerweise denjenigen Schülern ein Hindernis bereitet, die später in ihrem Studium oder in ihrem Beruf gelegentliche mathematische Entwicklungen sollten verstehen können; und solcher Schüler sind gar nicht so wenige, wie Sie zunächst vielleicht glauben, meine Herren. Wir wollen doch ja den Fehler solcher Pädagogen vermeiden, deren erzieherische Interessen mit dem Abiturium der Schüler abschließen. Die Rücksicht auf die Bedürfnisse der nachfolgenden Studien erscheint mir überhaupt bei den zurzeit geltenden Lehrplänen allzusehr hintangesetzt.

Andrerseits wird bei der geschilderten Behandlungsart auch die Gefahr bestehen, daß die allgemeinen Ideen, die für mich das Entscheidende sind, nicht hinreichend zur Geltung kommen, um dem ganzen Denken des Schülers einfürallemal aufgeprägt zu sein — ganz zu schweigen davon, daß überhaupt die große historische Perspektive und der Blick auf die hohe Bedeutung für die heutige Kultur dabei verloren geht. Ich bin überzeugt, wir müssen die Lehre von den Maxima und Minima durchaus mit ehrlicher Infinitesimalrechnung traktieren. Aber das ist ja nun der in der neueren Zeit besonders lebhaft umstrittene Punkt — die Frage, auf die sich die moderne Reform des mathematischen Unterrichts geradezu zuspitzt, und mit der müssen wir uns nun etwas eingehender beschäftigen. —

Exkurs über die Frage der Infinitesimalrechnung im Schullehrstoff.

Meine Herren, so stark in den Fragen des Schulwesens die persönlichen Meinungen nach verschiedenen Seiten auseinanderzugehen pflegen, über das Bestehen einer allgemeinen Gefahr des Schulunterrichts ist man sich seit langer Zeit einig: der Gefahr der Überbürdung. Alles Neue, was sich in den Schullehrplan eindrängen will, wird mit Recht zunächst scheel angesehen. Bei dem *Süvern*schen Plan von 1816, der, wie wir sahen, neben mancher anderen Neuerung zum ersten Mal den Versuch wagte, die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung als Gegenstand des allgemeinen Schulunterrichts anzusetzen, lag ohne Zweifel diese Überbürdungsgefahr vor. Doch auch in neuerer Zeit ist dasselbe Bedenken gegen die von uns vertretene Einführung der Infinitesimalrechnung auf der Schule von vielen Seiten geltend gemacht worden. Man fürchtet — besonders natürlich auf seiten der Nichtmathematiker, — daß eine Steigerung des mathematischen Pensums beabsichtigt sei, welche die Zeit und

Arbeitskraft für andre Unterrichtsfächer ungebührlich einschränken möchte. Ja, meine Herren, das mag in der Debatte, wenn von den Neuerungen im Lehrstoff die Rede ist, für den Laien vielleicht einmal so klingen, als ob nun das Neue zu der Fülle des Alten hinzukommen sollte. So ist es natürlich nicht. Ich kann nur immer wieder betonen, daß der mathematische Lehrstoff keineswegs vermehrt werden soll; ich möchte vielmehr nur Minderwichtiges durch Wertvolleres ersetzt sehen, oder wenn Sie wollen: Abstrakteres durch Leichterzugängliches!

Ein anderer Einwand, der ebenfalls oft gemacht wird, besteht darin, daß die Infinitesimalrechnung wissenschaftlich noch nicht hinreichend geklärt sei, um der Schule zugeführt werden zu können. Gewiß, vor hundert Jahren wäre das ein beachtenswerter Einwand gewesen, meinetwegen auch noch vor fünfzig. Aber heutzutage ist diese Ansicht — ich werde das später ausführlicher darlegen — durchaus irrig. Man muß nur nicht meinen, daß wir etwas mit der verschwommenen populären Literatur zu tun haben wollen, die in mystischer Weise mit dem Unendlichkleinen wirtschaftet. Ich gedenke im zweiten Teil dieser Vorträge darauf zurückzukommen. Eine Behandlung der Infinitesimalrechnung, wie sie von jener Seite gegeben wird, wäre allerdings geeignet, arge Verwirrungen in den Köpfen der Schüler anzurichten. Für den, der die Sache kennt, hat indessen die Infinitesimalrechnung heute vollständig jene singuläre Stellung verloren, die man ihr in früherer Zeit zusprach.

Wenn *Christian Wolff*, wie ich in unserem historischen Abschnitt [Seite 77] schon mitteilte, in seinen „Auszug“ die Infinitesimalrechnung nicht aufnahm, so ist das ganz verständlich. Diese Disziplin stellte damals ja das Allerneueste in der Wissenschaft dar; nur wenige Gelehrte verstanden überhaupt diese — Zauberkunst, das war sie eigentlich; eine ausgebildete Lehre gabs noch nicht. *Wolff* erscheint an sich schon als ein großer Neuerer, indem er das Buchstabenrechnen, die negativen Zahlen, Gleichungen ersten und zweiten Grades (wo die Idee des Imaginären bereits gelegentlich hereinkommt), und auch Logarithmen in seinen Kanon aufnahm — alles in seiner Zeit noch recht moderne Dinge. Sie dürfen überzeugt sein, meine Herren, wenn *Wolff* heute oder vor zwanzig Jahren gelebt hätte, er würde keinen Augenblick gezögert haben, die Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen aufzunehmen. Er würde vor allen Dingen auch nicht die so viel und immer wieder gebrauchten Schlagworte gelten lassen, die Infinitesimalrechnung sei „höhere Mathematik“, auf die Schule gehöre Elementarmathematik. —

Mit dem Worte „elementar“ ist es überhaupt eine eigene Sache. Die einen tun so, als sei alles in der Mathematik elementar,

was schon die Alten gemacht haben oder doch was im Euklid steht. Eine dementsprechende Definition ist natürlich ziemlich ungeschickt, da der so festgelegte Begriff weder auf den heutigen Bestand der Schulmathematik paßt, noch irgendwie auf den Sprachgebrauch des Wortes Rücksicht nimmt. Wie sollte auch gerade das für uns elementar sein, was bei den Griechen die ganzen Tiefen mathematischer Erkenntnis ausmachte? Bei anderen heißt elementar all das, was den Grenzbegriff vermeidet. Auch dies paßt nicht auf die Praxis der Schule. Oder sollte man, um die Definition zu retten, auf die Archimedische Berechnung von π und überhaupt auf die Betrachtung von Irrationalzahlen in der Schule verzichten wollen? Und wir dürften uns dann nicht wundern, wenn es auch einmal jemanden gelüsten sollte, die schwierigsten Teile der modernen Zahlentheorie auf die Schule zu bringen! Denn diese bestehen unabhängig vom Grenzbegriff. Endlich hat man auch definiert, es sei alles das elementar, was die Symbole der Infinitesimalrechnung $\frac{dy}{dx}$, $\int y\,dx$ vermeide. Aber das sieht doch vollends nach einer hinterher konstruierten Rechtfertigung aus. Im Grunde ist die heutige Umgrenzung der Schulmathematik gewiß nur historisch zu begreifen.

Sieht man es allerdings darauf ab, immer weiter an dem Wort „elementar" herum zu drehen und zu deuteln, so kann man zuguterletzt auch das Gegenteil von dem herauslesen, was eigentlich gemeint ist: Elementarmathematik sei die Lehre von den letzten „Elementen", den Grundbestandteilen, den logischen und erkenntnistheoretischen Grundlagen der mathematischen Wissenschaft. Nun, meine Herren, wenn man das Elementarmathematik nennen will — die ist gewiß nicht „elementar"!

Solchen künstlichen Definitionen des Wortes „elementar" möchte ich hier eine andre gegenüberstellen, die mir als die natürlichste und zugleich als allein brauchbare erscheint. „Elementar" ist in einem Gebiete das, was sich auf Grund seiner relativen Einfachheit zu einer naturgemäßen Einführung in den Gegenstand eignet. Die Elementarmathematik wird danach diejenigen Teile der Mathematik umfassen, die nach dem heutigen Stande der Wissenschaft ohne ein fortgesetztes Spezialstudium für einen menschlichen Geist mittlerer Begabung zugänglich sind. Die Schulmathematik aber wird aus dieser Elementarmathematik wieder das herausgreifen müssen, was am besten dem Ziel der höheren Schulen entspricht, nämlich: eine allgemeine Grundlage zu bieten für das Verständnis unserer heutigen Kultur. Von diesem Standpunkt aus, meine Herren, müssen wir nun sagen: Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung gehören keineswegs zur „höheren Analysis", sondern

zur Elementarmathematik; und nicht bloß das, — sie sollten auch Bestandteil der Schulmathematik sein, nach eben dem angegebenen Kriterium.

Was zunächst den ersteren Punkt betrifft, so ist in neuerer Zeit häufig gesagt worden, die Infinitesimalrechnung sei für die Schule an sich viel zu schwer. Und damit verbindet sich sogleich die weitere Bemerkung: Wenn man auf der Schule diese Dinge traktiere, so arte das notwendig alsbald in einen bloßen Formalismus aus, der Schüler lerne ganz mechanisch differenzieren und integrieren, ohne den Kern der Sache zu verstehen. Auch diese Einwände muß ich, mindestens in ihrer usurpierten Objektivität, unbedingt zurückweisen.

Ob das Verständnis eines Lehrstoffs, meine Herren, den Schülern schwer oder leicht fällt, das hängt in hohem Maße von der Darstellungsweise ab. Denken Sie z. B. an die früher erwähnte Schwierigkeit [Seite 39], die in dem stetigen Charakter der Exponentialfunktion liegt. Da gleitet die Schule herkömmlicherweise — und niemand protestiert dagegen — über die feineren Punkte hinweg, weil deren Aufspürung für das Bewußtsein des Schülers auf jener Stufe etwas recht Erzwungenes haben würde. Entsprechend wird eine Infinitesimalrechnung, die etwa mit dem allgemeinsten Funktionsbegriff und den schwierigeren Existenzfragen des Differentialquotienten beginnt, ganz naturgemäß erst einem reiferen mathematischen Denken zugänglich sein. Haben wir dagegen — und so ist es doch gemeint — einen Unterricht im Sinn, der von einfachen graphisch dargestellten Funktionen ausgeht, der hernach etwa an dem Kurvenbilde eines selbstregistrierenden Thermometers die immanente Idee des Temperaturgefälles zum klaren Begriff des Differentialquotienten entwickelt, und der bei anderer Gelegenheit den Begriff des Integrals anschaulich aus ganz natürlichen Inhaltsbetrachtungen in einfachen Fällen gewinnt, — dann kann in keiner Weise behauptet werden, das sei für einen Schüler zu schwer.

Ganz ähnlich erledigt sich auch der Einwand, daß die Infinitesimalrechnung auf der Schule alsbald in einen bloßen Formalismus ausarte. Das kommt offenbar sehr auf den Unterricht an und ist eine allgemeine Gefahr, der überhaupt entgegengearbeitet werden muß. Es ist gar nicht einzusehen, warum etwa die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung mehr zum Formalismus verführen sollten, als z. B. die Auflösung logarithmisch-trigonometrischer Aufgaben oder die Behandlung des binomischen Satzes für positive ganze Exponenten. Von einer Systematik der Infinitesimalrechnung ist ja ohnehin hier nirgends die Rede.

Aber nicht bloß „elementar“ sind die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung, daß sie in die Schulmathematik aufgenommen werden

könnten, sondern ich trete auch entschieden für die Notwendigkeit dieser Aufnahme ein! Nach meiner Auffassung gehört schon heute die Infinitesimalrechnung als Ausgestaltung des Funktionsbegriffs zur allgemeinen mathematischen Bildung, die man von jedem verlangen sollte, und wird es in Zukunft immer mehr gehören. Ich habe früher [Seite 34] darzulegen gesucht, welche zentrale Bedeutung innerhalb des gesamten modernen Lebens dem Funktionsbegriff zukommt, und darin müssen Sie auch den Hauptfortschritt der preußischen Lehrpläne von 1901 hinsichtlich des mathematischen Unterrichts erblicken, daß hier (in den methodischen Bemerkungen) ausdrücklich auf die Wichtigkeit dieses Begriffs hingewiesen wird. Ein wirkliches Verständnis des Gegenstandes ist indessen ohne Zweifel nur möglich, wenn man bei der graphischen Darstellung der Funktionen auch mit dem Begriff der Neigung gegen die Horizontale operieren kann, und ebensosehr bedarf man da und dort der Idee des Flächeninhalts von Kurven. Soll ich auch noch darauf hinweisen, daß sich in der Mechanik die unentbehrlichen Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung nur in Verbindung mit den Ideen der Differentialrechnung hinreichend deutlich machen lassen? Hier liegt die Notwendigkeit einer Umgestaltung unseres Unterrichts wohl besonders klar zutage. Ich fasse also kurz zusammen: eine gründliche und fruchtbare Behandlung des Funktionsbegriffs sowie der Grundbegriffe der Mechanik involviert ganz naturgemäß die Hereinnahme der elementaren Infinitesimalrechnung in den Unterricht der höheren Schulen.

Den Vorwurf, man schiebe damit diesen Anstalten die Aufgabe einer Fachbildung zu, was auch ich für verwerflich erklären würde, muß ich als vollkommen ungerechtfertigt zurückweisen. Man wundert sich nur darüber, daß mehrfach gerade Mathematiker noch heute die Ansicht zu haben scheinen, die Infinitesimalrechnung gehöre nicht zur allgemeinen Bildung, sondern sei nur für einzelne wichtig als Vorbereitung auf ihre Fachstudien. Vor hundert Jahren mag das meinetwegen gegolten haben; heute aber noch diese Ansicht zu vertreten, meine Herren, kann man sich schwerlich anders erklären als durch den lieben Hang, am Bestehenden festzuhalten. Man meint, ein Verständnis für jene Grundvorstellungen sei bereits ein Fachwissen, weil sie von altersher den Eingang zum Fachstudium der höheren Mathematik wie zum Fachstudium der Technik gebildet haben. Ich bin dagegen überzeugt, daß es sich vielmehr um eine notwendig zu vollziehende Ideenbildung handelt — notwendig für jeden, der als moderner Mensch in die Entwicklung unseres kulturellen Lebens mit offenem Geist eintreten will! —

Bisweilen ist ein besonderer Einwand in Hinsicht auf diejenigen Abiturienten der höheren Schulen gemacht worden, die weiterhin

an der Hochschule die mathematischen Anfangsvorlesungen besuchen sollen, — also die Naturwissenschaftler, die Ingenieure, die Mathematiker usw. Man hat gesagt: es schade diesen, wenn sie bereits auf der Schule von der Infinitesimalrechnung einiges lernten, weil es doch nicht exakt genug sei, um als Grundlage des späteren Studiums zu dienen; ja es verderbe ihnen die Freude, diese reizvollen Dinge erst beim Beginn des akademischen Lebens kennen zu lernen. Man weiß eigentlich nicht, ob man die letztere Bemerkung völlig ernst nehmen darf; denn nach demselben Prinzip, meine Herren, könnte man noch gar vieles aus dem Lehrplan der Schulen streichen. Aber auch das Bedenken der Nichtexaktheit verliert, wenn man recht erwägt, seine Bedeutung. Das Lernen hat nun einmal sein Wesen darin, daß man nicht immer mit der exaktesten Begründung anfängt, sondern vielfach von praktischen Fähigkeiten ausgeht, um erst hernach bei hinreichender Reife des Denkens zur logischen Durchbildung aufzusteigen. Man lehrt — um es kraß auszudrücken — nicht das Kind die axiomatischen Grundlagen der Arithmetik, und den Oberprimaner das Einmaleins! Vom pädagogischen Standpunkt kann es für die höheren Studien gewiß keinen Nachteil bedeuten, wenn schon der Schüler ein klein bischen differenzieren und integrieren gelernt hat, mußte auch die feinere logische Grundlegung dabei unterbleiben und mehr durch ein anschauliches Vorgehen ersetzt werden. Im Gegenteil, diese Vorbildung wird dem Studierenden, der die Anfangskollegien über Differential- und Integralrechnung hört, von gutem Nutzen sein.

Natürlich bleibt dem Dozenten die Aufgabe, seine Hörer mit Rücksicht auf diese Vorkenntnisse überall durch interessante und anregende Behandlung des Gegenstandes zu fesseln. Damit rühre ich an eine Stelle, meine Herren, wo unsere heutigen Verhältnisse an der Hochschule meines Erachtens allerdings vielfacher Änderungen bedürfen. Ich möchte Sie hier noch einmal [Seite 65] auf meinen Aufsatz von 1905 über „Hochschulprobleme“*) hinweisen, wo ich mich in der Form der Anfrage an die Hochschuldozenten der Mathematik und Physik wandte, um zu einer vielseitigen Diskussion über den genannten Gegenstand anzuregen. *C. Chun* und *C. Duisberg* haben — ebenso wie ich von der Breslauer Unterrichtskommission beauftragt — entsprechende Aufsätze betreffs des biologischen und des chemischen Hochschulunterrichts veröffentlicht**). Indessen ist die Sache leider noch nicht hin-

*) Der Aufsatz ist, wie früher schon bemerkt, im Anhang C des vorliegenden Buches abgedruckt.

) **a) *C. Chun*, Probleme des biologischen Hochschulunterrichts, in der Zeitschrift „Natur und Schule“, Leipzig (Teubner), **5** (1906), Seite 1 bis 8. **b)** *C. Duisberg*, Über den chemischen Hochschulunterricht für Lehramtskandidaten,

reichend in Fluß gekommen. Und doch erscheint sie außerordentlich wichtig. Wenn heute schon an den höheren Schulen verschiedene Wege spezifischer Allgemeinbildung vorhanden sind und wir an deren weiterem Ausbau arbeiten, so wird es unumgänglich sein, daß auch die Hochschule fernerhin von dieser Tatsache Notiz nimmt und sich die Anfangsvorlesungen viel stärker als bisher in spezifischem Betrieb an die verschiedene Vorbildung der Abiturienten anpassen. Es gibt eben heutzutage kein einheitliches Niveau der Vorkenntnisse mehr, das zur Immatrikulation berechtigt; und wenn das auch für einen Dozenten, der sich an eine bestimmte Art des Vortrags gewöhnt hat, unbequem sein mag, so halte ich es für seine Pflicht, sich an die tatsächlich bestehenden Verhältnisse zu adaptieren.

Aber kehren wir zu unsrer Frage der Infinitesimalrechnung zurück. Nach dem Gesagten muß ich die Überzeugungen weiter vertreten, die ich so zusammenfasse: Die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung sind bei zweckmäßiger Behandlungsweise auf der Schule ein sehr viel geeigneterer mathematischer Lehrstoff als manches Fremdartige und Tote, was heute den nicht spezifisch mathematisch Befähigten und Interessierten nur abstoßen kann; sie werden durch eine gründliche und fruchtbare Behandlung des Funktionsbegriffs, dessen hohe anerkannte Wichtigkeit eine zentrale Stellung für ihn fordert, von selbst hereingebracht; sie lassen sich zu einem klaren Erfassen zahlreicher physikalischer Tatsachen gar nicht entbehren; und sie sind vom Standpunkte des Prinzips der Allgemeinbildung eins der wesentlichsten Stücke des mathematischen Unterrichts. —

Ich will noch bemerken, daß die Schule den Infinitesimalgedanken auch abgesehen von der Behandlung der Maxima und Minima ohnehin an nicht wenigen Stellen zu benutzen pflegt. Wenn sie z. B. in der Planimetrie den Kreisinhalt nach *Archimedes* berechnet, wenn sie also die Größe des Kreisinhalts zwischen die Größen der Flächeninhalte des einbeschriebenen und des umbeschriebenen regulären n-Ecks einschließt und den $\lim_{n=\infty}$ bestimmt, dann ist das offenbar eine spezielle Integration, wobei der Grenzübergang in einfacher Weise direkt numerisch verfolgt wird. Was macht man in der Stereometrie, wenn die allerersten Mittel der Rauminhaltsberechnung durch Abschneiden und Zufügen endlicher Stücke nicht mehr ausreichen? Anstatt das Verfahren der Infinitesimalrechnung klipp und klar einzuführen, begnügt man sich auf unseren Schulen zumeist mit einem kümmerlichen Surrogat, dem sogenannten

Zeitschrift für angewandte Chemie, Leipzig (Spamer), **19** (1906), I, Seite 1027 bis 1039; auch separat erschienen unter dem Titel: Der chemische Unterricht an der Schule und der Hochschulunterricht für die Lehrer der Chemie, Leipzig (Spamer) 1906.

Cavalierischen Prinzip, welches hier im Lehrgang wie der deus ex machina erscheint und genau genommen ja doch die Idee des Integrals enthält — nur eben in einer altmodischen und weniger brauchbaren Form. Auch auf die Tangentenberechnung bei den Kegelschnitten will ich hinweisen, die oft nicht als eine verallgemeinerungsfähige Methode auftritt, sondern mehr wie ein Kniff, der fast zufällig zu einem gescheiten Resultat führt. Wie verträgt sich damit, daß gleichwohl im Physikunterricht meist in naiver Weise von Tangenten und Flächeninhalten beliebig gestalteter Kurven gesprochen wird? daß in der Mechanik die kühnsten Infinitesimalbetrachtungen zur Ableitung der Hauptgesetze herangezogen werden?

Da meine ich, man soll, wie ich schon bei der Besprechung der Maxima und Minima hervorhob, überall die Infinitesimalrechnung ehrlich als solche traktieren und die in der Mathematik sonst gebrauchten Bezeichnungen nicht ängstlich vermeiden, um sich womöglich ungeschicktere zu erfinden. Vielmehr da es keine höhere Belastung ist, wird man gerade Wert darauf legen, daß der Schüler rechtzeitig auch die wissenschaftliche Bezeichnungsart der Begriffe lernt, schon damit ihm jederzeit der Weg in die Literatur hinein geebnet ist. Es ist in der Tat eine Forderung der Zweckmäßigkeit, auch die üblichen Symbole ungezwungen heranzubringen.

Übrigens bin ich mit der Befürwortung der elementaren Infinitesimalrechnung für die Schule keineswegs ein unerhörter Neuerer. Seit hundert Jahren sind bei uns immer wieder einzelne lebhaft dafür eingetreten und haben der in Absonderung von der Wissenschaft drohenden Erstarrung des Lehrstoffs, von der ich sprach, entgegenwirken wollen. Über den *Süvern*schen Lehrplan von 1816 [Seite 81 ff.] und über den Unterricht bei *Schellbach* [Seite 106 ff.] will ich mich hier nicht mehr verbreiten; ich will nur noch einige weitere Tatsachen aus den späteren Dezennien anfügen.

Einen Mittelpunkt gesteigerter mathematischer Lehrtätigkeit bildete in den sechziger Jahren unter anderen das Wiesbadener Realgymnasium. Es waren dort besonders die Lehrer *T. Müller* und *W. Unverzagt*, die in langjährigem Wirken den Unterricht in der Infinitesimalrechnung und ihren Anwendungen auf Geometrie und Mechanik organisierten.

Dann hat man in den siebziger Jahren von verschiedenen Seiten versucht, für die Aufnahme der Infinitesimalrechnung in den Lehrstoff der höheren Schulen allgemein Propaganda zu machen. Ein Aufsatz von *W. Gallenkamp*: Über den mathematischen Unterricht im Gymnasium*), worin die Anfangsgründe der Differential- und Integral-

*) Zeitschrift für das Gymnasialwesen, Berlin (Weidmann), **31** (1877), Seite 1—22.

rechnung für den Gymnasiallehrplan gefordert werden, erscheint noch heute recht lesenswert. Auf der „32. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner“ zu Wiesbaden 1877 empfahl der genannte *Unverzagt* die Annahme einer These, daß die (damalige) Realschule erster Ordnung, die „ein Übergewicht in den exakten Wissenschaften anzustreben“ habe, wenigstens die Differentialrechnung noch mitbehandeln müsse; in der sich daran schließenden lebhaften Diskussion fand der Redner viele Zustimmung, aber die Thesis wurde dann bei einer Abstimmung doch mit geringer Majorität abgelehnt*).

Auch als die Opposition gegen die Infinitesimalrechnung auf den höheren Schulen in den achtziger und neunziger Jahren ihren Höhepunkt erreichte — wir haben ja [Seite 92 und 94] gesehen, wie durch die Lehrpläne von 1882 und 1892 jener Lehrstoff von den preußischen Realanstalten verbannt wurde — auch damals hat es an Stimmen nicht gefehlt, die für die Sache sprachen. So hat *A. Höfler* (damals Professor an der Wiener Universität) in einer Besprechung**) der preußischen Schulkonferenz von 1890 die Aufnahme der Infinitesimalrechnung in beschränkter Form in den gymnasialen Lehrplan befürwortet. Ganz besonders hat *H. Seeger* (der inzwischen verstorbene Direktor des Realgymnasiums zu Güstrow in Mecklenburg) in einer Reihe von Programmschriften[0]) die Notwendigkeit ebendieses Lehrstoffs aufs eifrigste und mit überzeugenden Gründen verfochten; vor allem, so führt der Verfasser aus, könne man ohne Infinitesimalrechnung den einfachsten Dingen der Mechanik nur eine höchst unbefriedigende Darstellung geben. Daß zu jener Zeit auch an manchen außerpreußischen Oberrealschulen eine ausgedehntere Infinitesimalrechnung bestehen blieb, darauf komme ich später zurück. —

Bei den hier geschilderten Bestrebungen, die Infinitesimalrechnung der Schule zuzuführen, ist der Gedanke allerdings in der Regel der, daß dieser Lehrstoff auf den Oberklassen als eine neue Disziplin an das übrige Pensum anzureihen sei. Nachdem man den traditionellen Lehrstoff erledigt habe, solle nun eine Einführung in die sogenannte höhere Analysis mit neuen Ideenbildungen und

*) Verhandlungen der 32. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, Leipzig (Teubner) 1878, Seite 180—188.

) Bemerkungen zu den Berliner Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts, in der Zeitschrift „Österreichische Mittelschule“, Wien (Hölder), **5 (1891), Seite 105—133.

[0]) **a)** Schulprogramm 1891, Nr. 649 (Realgymnasium zu Güstrow): Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz. **b)** Schulprogramm 1893, Nr. 653 (ebenda): Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu dem Erlaß des preußischen Unterrichtsministeriums von 1892. **c)** Schulprogramm 1894, Nr. 658 (ebenda): Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung.

neuen Methoden folgen. Demgegenüber muß ich stets wieder nachdrücklich betonen, daß ich mir die Elemente der Infinitesimalrechnung auf der Schule ganz anders denke. Sie sollen nach meiner Meinung — und von demselben Standpunkt gehen überhaupt die modernen Reformbestrebungen des mathematischen Unterrichts aus — völlig organisch in den übrigen Lehrplan eingearbeitet werden! Während der heute geltende Kanon der Schulmathematik allzusehr von den Zufälligkeiten der Überlieferung beherrscht ist, besteht die Absicht, den Lehrstoff in zeitgemäßer Weise homogen zu machen. Auf Grund davon, daß die graphische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten wirklich in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts zu rücken ist, soll an den einfachsten Beispielen von Kurven schon früh von dem Wachsen und Abnehmen der Funktionen, von der Neigung, von der Steigung oder dem Gefälle gesprochen werden, und ebenso auch von dem Verfahren, Kurveninhalte durch Abzählen von Quadraten näherungsweise zu berechnen. Den Oberklassen bleibt es vorbehalten, aus solchen früher behandelten, längst vertraut gewordenen Fällen die Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals in allgemeinerer Form herauszupräparieren!

Gerade in diesem Punkt kommen auf seiten der Gegner unserer Tendenzen immer wieder Mißverständnisse vor. Aber auch von den Freunden der ganzen Bewegung gilt bisweilen dasselbe. So kann ich mich z. B. — um nur eins zu nennen — mit dem neuen Schullehrbuch von *R. Schröder*, Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung*) gar nicht einverstanden erklären; hier wird im Vorwort geradezu als Absicht des Verfassers bezeichnet: mit den Primanern „nach der analytischen Geometrie der Ebene und nach der niederen Analysis die Elemente der höheren durchzunehmen“ — das ist gerade das, was ich jedenfalls ablehnen muß. Wesentlich zweckmäßiger erscheint mir schon das Buch von *L. Tesař*: Elemente der Differential- und Integralrechnung**); der Verfasser beginnt mit einem ausführlichen Kapitel über graphische Darstellung von Funktionen und weist auf die Notwendigkeit hin, die einzelnen Abschnitte in das Pensum der verschiedenen Klassen einzuarbeiten, er überläßt allerdings die Art dieser Durchdringung ganz dem Lehrenden. Als in derselben Weise erfreulich muß ich auch die Schrift von *K. Albrich* nennen: Behandlung der Funktionen im Mittelschulunterricht⁰). —

Wir haben die Einwände gegen die Infinitesimalrechnung auf der Schule vorhin sachlich durchgesprochen; von den Gegnern selbst will ich hier nicht ausführlicher berichten. Nur eine kurze

*) Leipzig (Teubner) 1905.

**) Leipzig (Teubner) 1906.

⁰) Separat aus einer Festschrift, Hermannstadt (Krafft) 1906.

Notiz. Bei den Bestrebungen, die in den Lehrplänen von 1892 zur völligen Elimination der Infinitesimalrechnung aus den höheren Schulen führten, stand *G. Holzmüller* an der Spitze, angesehen als namhafter mathematischer Pädagoge und damals Direktor der Maschinenbauschule zu Hagen in Westfalen. Seine Art, den Lehrstoff zu „elementarisieren", haben wir bei Besprechung seiner „Ingenieurmathematik" schon früher kennen gelernt [Seite 63 f.]. Mit zahlreichen Bedenken hat er sich gegen die neueren Tendenzen gewandt; Sie mögen seinen Aufsatz vergleichen: „Ist es möglich und wünschenswert, die Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen aufzunehmen?" *) Ich habe mich danach indessen mit Herrn *Holzmüller* in persönliche Verständigung gesetzt, und es kam heraus, daß unsere Meinungen schließlich gar nicht so stark auseinandergingen, wie es zunächst den Anschein hatte. Wenn Sie sich näher dafür interessieren, bitte ich Sie, meine Ferienkursschrift vom Sommer 1904 einzusehen [zitiert Seite 5], wo ich mich überhaupt über die Frage des Funktionsbegriffs und der Elemente der Infinitesimalrechnung verbreitet habe. Was ich hier in der Vorlesung über den Gegenstand gesagt habe, mag teils als Ausführung, teils als Ergänzung zu jenem gelten.

Ein Vorbild geben uns in der ganzen Frage die französischen höheren Schulen, auf die ich Sie schon einmal hinwies. Wir hatten erörtert [Seite 40 ff.], wie die Realanstalten bereits auf der Unterstufe im Anschluß an graphisch dargestellte Funktionen den Begriff des Differentialquotienten heranbrachten. Für die oberen Klassen geht allerdings ein direkter Vergleich mit unseren deutschen Verhältnissen schwerlich an, da die französischen Schulen dort viel stärker nach verschiedenen Richtungen spezifiziert sind. Die „sprachlichen" Anstalten betonen nachdrücklicher die philosophisch-historische Seite; an den realistischen haben dafür Mathematik und Naturwissenschaften unbedingte Vorherrschaft. Bei der großen Zahl von acht Wochenstunden für Mathematik auf der obersten Klasse der Realanstalten wird nicht nur die Infinitesimalrechnung entsprechend ausgedehnt, sondern auch in weitgehendstem Maße die Anwendungen hereingezogen, die sich in folgende Kapitel gliedern: Kurvenlehre, Kinematik, Statik, Dynamik, darstellende Geometrie, Kosmographie. Die „sprachlichen" Anstalten andrerseits sollen, obwohl sie auf der gleichen Stufe nur zwei Wochenstunden Mathematik haben, nach dem Lehrplan [zitiert Seite 40] doch noch bis zu den Elementen der Infinitesimalrechnung führen. Freilich ist mir mehrfach

*) Monatschrift für höhere Schulen, Berlin (Weidmann), 2 (1903), Seite 537—544.

erzählt worden, bei der geringen Stundenzahl habe kein rechter Erfolg erzielt werden können, und das ist ja auch von vornherein wahrscheinlich. Immerhin bleibt bemerkenswert: auch hier wird das eigentliche mathematische Lehrziel der höheren Schule in der Erziehung zum funktionalen Denken gesehen, und das involviert eben von selbst die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung!

Frankreich ist in der Verwirklichung dieser Ideen vorangegangen. Jetzt rührt man sich allerorten, um die Reformen, auf welche die gesamte Zeitströmung hingeführt hat, in die Wege zu leiten. Auch in Österreich z. B. hat der Gedanke, die elementare Infinitesimalrechnung in den Schulunterricht aufzunehmen, inzwischen weite Verbreitung gefunden. Die Sache kam dort ins Rollen durch einen Vortrag von *K. Zahradníček* vor zwei Wiener Vereinen*) und durch zwei Referate, die *E. Czuber* und *F. Hočevar* auf der Meraner Naturforscherversammlung 1905 hielten**). Jetzt ist man auch zu ins einzelne gehenden Vorschlägen gelangt; *A. Höfler* hat solche im Auftrag des Vereins „Deutsche Mittelschule in Prag“ herausgegeben⁰). Sie liegen in derselben Richtung wie bei uns und lehnen sich vielfach direkt an unsere Meraner Vorschläge an. In der Schweiz und in Italien hat ebenfalls die Diskussion über derartige Umgestaltungen des mathematischen Unterrichts eingesetzt; die Tendenzen haben indes noch keine festere Form gewonnen.

Schließlich, meine Herren, mögen Sie noch einen Punkt bedenken, der die in Rede stehende Umgestaltung nicht wenig erleichtern wird: Wir befürworten einen Lehrstoff, der seiner Natur nach den Schüler stärker anzieht und ihm von Anbeginn mehr Freude macht als vieles, was ihm heute mühsam eingezwängt werden muß, — wenigstens allen denjenigen, die nicht für abstrakte mathematische Betrachtungen spezifisch befähigt oder interessiert sind. Ich könnte mich hier auf die Unterrichtserfahrungen *Seegers* berufen⁰⁰), aber ich glaube, jeder von Ihnen empfindet sofort die Richtigkeit dieser These

*) Über die Frage der Verwendung der Infinitesimalrechnung beim Unterricht in der Mathematik und Physik an den österreichischen Mittelschulen, in der Zeitschrift: Österreichische Mittelschule, Wien (Hölder), **19** (1905), Seite 36—54.

) **a) *E. Czuber,* Die Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht vom österreichischen Standpunkte, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **15** (1906), Seite 116—131. **b)** *F. Hočevar,* Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht?, ebenda, Seite 262—265.

⁰) Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen, im Auftrage ... erstattet von *A. Höfler,* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **37** (1906), Seite 145—159; auch separat erschienen: Leipzig (Teubner) 1906.

⁰⁰) „Bemerkungen über Abgrenzung ...“ [zitiert Seite 117], Seite 5.

in sich. Man kann sagen, daß unsere Schuljugend bisweilen ein gutes Gefühl dafür hat, was das Lebendige und was das Tote am großen Wissensstoff ist. —

Kehren wir nun von unserem Exkurs zurück und fahren in der Besprechung der bestehenden Lehrpläne fort.

Die Lehrpläne in der Geometrie.

Wir stellen uns wiederum für die drei Oberklassen zunächst der Gymnasien das Lehrstoffschema zusammen:

Geometrie: Gymnasium

Von der Unterstufe her soll bekannt sein:	Planimetrie bis zur Ähnlichkeitslehre, den regulären Vielecken und der Kreismessung; Konstruktionsaufgaben.
IIa	Harmonische Punkte und Strahlen; Transversalen. Anwendung der Algebra auf die Geometrie; planimetrische Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit „algebraischer Analysis". Goniometrie, einfachste trigonometrische Berechnungen.
Ib und Ia (im Lehrplan nicht getrennt)	Weitere planimetrische Konstruktionsaufgaben; weitere trigonometrische Übungen. Stereometrie (mit Anwendung auf Kosmographie); perspektivisches Zeichnen räumlicher Gebilde. Koordinatenbegriff (mit Anwendung auf Kegelschnitte).

Für die Realanstalten sieht das entsprechende Schema, um es gleich hinzuzufügen, folgendermaßen aus:

Geometrie: Realgymnasium und Oberrealschule.

Von der Unterstufe her soll bekannt sein:	Das Gymnasialpensum der Unterstufe; dazu: Anwendung der Algebra auf die Geometrie; planimetrische Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit „algebraischer Analysis". Einführung in die Stereometrie (perspektivisches Zeichnen räumlicher Gebilde, Körperberechnungen).
IIa	Harmonische Punkte usw.; * Chordalen, Ähnlichkeitspunkte. Weitere planimetrische Konstruktionsaufgaben; weitere trigonometrische Übungen. Stereometrie systematisch.
Ib und Ia (im Lehrplan nicht getrennt)	* Sphärische Trigonometrie (mit Kosmographie). * Darstellende Geometrie. * Kegelschnitte synthetisch. * Analytische Geometrie der Ebene (Kegelschnitte analytisch).

Die Stellen, wo Erweiterungen gegenüber dem Gymnasialpensum vorliegen, sind in dieser Tabelle ebenso wie früher [Seite 102] mit einem * bezeichnet. —

Lassen Sie mich nun in ähnlicher Weise wie beim arithmetischen Lehrstoff eine Reihe von erläuternden und kritischen Bemerkungen anschließen, ich greife dabei natürlich wieder nur die wichtigsten Punkte heraus.

1. Die planimetrischen Konstruktionsaufgaben sind ein Gegenstand, der von altersher auf unseren Schulen einen breiten Raum einnimmt, und deren Wichtigkeit in den Lehrplänen von 1901 erneut hervorgehoben wird. Man hat gesagt, diese Aufgaben hätten einen großen Reiz für die Schüler und zugleich hohe bildende Bedeutung, indem sie zu schöpferischer Tätigkeit anregten. Ich will nicht bestreiten, daß daran viel Wahres ist. Aber man soll sich nicht zu sehr der Begeisterung hingeben; gerade bei dieser Art häuslicher Arbeit ist ein Übel recht verbreitet, das jene Argumentation eigentlich hinfällig macht oder wenigstens in ihrer Tragweite stark einschränkt. Selbständig gelöst werden die häuslichen Konstruktionsaufgaben nämlich in zahlreichen Fällen nur von einzelnen Schülern, und die anderen schreiben sie mehr oder weniger ab; — dann mag der Lehrer seinen Scharfsinn daran versuchen, die Zentren der schöpferischen Tätigkeit in der Klasse herauszufinden.

Aber auch abgesehen von diesem häufigen Zwiespalt zwischen Idee und Wirklichkeit können wir die starke Vorherrschaft der planimetrischen Konstruktionsaufgaben im geometrischen Lehrstoff nicht billigen. Gewiß haben die Aufgaben ihre große Bedeutung, indem der Schüler das angeeignete Wissen anwenden lernen und durch das eigne Konstruieren seine Anschauung üben soll. Die Art jedoch, die darauf hinauskommt, daß sich der Schüler nur eine gewisse Rutine erwirbt, — ich meine das Verfahren, daß auf den verschiedenen Stufen wochenlang Dreiecke aus irgendwelchen fernliegenden Bestimmungsstücken theoretisch konstruiert werden — das muß uns doch als verfehlt erscheinen. Eine solche Behandlung dieser Aufgaben wäre nur von dem Standpunkt einer einseitig formalistischen Ausbildung zu rechtfertigen, und den können wir heute unmöglich gelten lassen.

2. Bei der Aufzählung der verschiedenen geometrischen Lehrgegenstände ist durchaus der Gedanke einer einheitlichen Verbindung zu vermissen. Die Goniometrie und Trigonometrie stehen z. B. völlig losgelöst vom übrigen Lehrstoff da. Und in der Tat soll es häufig im Unterricht auch so sein, daß diese Gegenstände ohne jeden Zusammenhang mit der übrigen Mathematik behandelt werden, — womöglich noch dazu in der überaus langweiligen Weise,

daß eine große Menge von Relationen zwischen den gleichgültigsten Größen durchgerechnet wird und weiter nichts.

Besonders springt jene Zerstückelung der Schulmathematik an der Stelle in die Augen, wo die Realanstalten über die Gymnasien hinausgehen. Es sind eine Anzahl gesonderter Kapitel angehängt, die geradezu ohne innere Verbindung dastehen und den Anschein einer ziemlich willkürlichen Auswahl erwecken müssen. Von einem planvollen Aufbau des Lehrstoffs ist nicht viel zu spüren, sodaß der Mathematikunterricht an den Realanstalten nur mehr an Einzelheiten bietet, aber eigentlich keine höhere Stufe erreicht als am Gymnasium. Wir haben früher gesehen, wie dies historisch zustande gekommen ist. Aber gerade darum müssen wir jetzt, nachdem wir das Prinzip von 1900 [Seite 96 ff.] haben, unsere Stimme erheben.

Beachtenswert scheint mir auch zu sein, daß der Lehrplan der Realanstalten zunächst die synthetische Behandlung der Kegelschnitte anführt und dann erst die analytische Geometrie folgen läßt. Das sieht ganz so aus, meine Herren, als wolle man sich möglichst lange ohne das „höhere" Gebiet der analytischen Geometrie behelfen, um sie dann zuletzt als rettenden Engel erscheinen zu lassen. Jedenfalls erreicht man mit solchem Verfahren dieses: zunächst ist dem Oberprimaner die traditionelle analytische Geometrie uninteressant, weil sie mit allzu simpeln und scheinbar überflüssigen Dingen beginnt; dann, wenn er ihren Nutzen einsieht, ist er enttäuscht, daß man ihn früher auf eine unzweckmäßigere Weise geplagt hat, und schließlich ist es meist zu spät, als daß er sich die fruchtbaren Grundideen noch bis zur wirklichen Assimilation aneignen könnte! Ich meine auch, daß sich die Lehre von den Kegelschnitten bei geschickter Mischung der synthetischen und analytischen Methode weit ergiebiger gestalten läßt.

3. Im allgemeinen besteht im Lehrplan, ebenso wie zwischen den einzelnen Teilen der Geometrie, so auch zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Lehrstoff keine rechte innerliche Beziehung. Nur an einer Stelle erkennen wir das Bestreben, eine Verbindung herzustellen, nämlich da, wo es heißt: „Anwendung der Algebra auf die Geometrie, planimetrische Konstruktionsaufgaben, besonders solche mit algebraischer Analysis". Ich muß nun sagen, gerade diese Verschmelzung, wie sie auf der Schule gehandhabt wird, ist ziemlich altmodisch. Es handelt sich nämlich um Aufgaben wie diese: den Ausdruck $x = \frac{a \cdot b}{c}$ zu konstruieren, den Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ zu konstruieren, wenn $a, b, \ldots$ gegeben sind, und dergleichen mehr. Und weiterhin werden planimetrische Kon-

struktionsaufgaben dadurch gelöst, daß man in der Analyse die Fragestellung ins Arithmetische überträgt, sie dort löst und sie hinterher wieder in geometrische Konstruktion übersetzt. Gewiß mag das eine brauchbare Übung sein; aber ich bin überzeugt, rechtes Leben gewinnt die Verbindung von Arithmetik und Geometrie doch erst, wenn sie in der Form der kartesischen Koordinaten erscheint; dann erst hat sie die klassische Gestalt, in der sie zu fruchtbaren Ideenbildungen Anlaß gibt. —

4. Es sind zwar moderne Gegenstände in den Lehrplan mehrfach aufgenommen; indes sie treten noch zu wenig hervor. Gerade soeben habe ich Sie wieder auf den Koordinatenbegriff hingewiesen. Wir haben früher schon ausführlicher von seiner Wichtigkeit geredet, und daß es unzweckmäßig ist, ihn erst am Schluß der Prima zu bringen [Seite 34 und 36 f.]. Aber auch das, was man wohl „den Geist der neueren Geometrie" genannt hat, die Vorstellung der kontinuierlichen Veränderlichkeit geometrischer Gebilde, das kommt auf den höheren Schulen gar nicht in dem Maße zur Geltung, wie es die allgemeine Bedeutung dieser Idee verlangt. Im Lehrplan wird zwar von „synthetischer" Geometrie der Kegelschnitte gesprochen. Doch darunter versteht man — nicht etwa, wie es in der Wissenschaft gebräuchlich ist, die Geometrie *Steiners* — sondern im wesentlichen die Geometrie der Kegelschnitte, wie sie von *Apollonius* stammt [Seite 68]. Und so werden denn auch die harmonischen Elemente meistens ausschließlich in der antiken Form der Starrheit behandelt. Daß seitdem in dem Gedanken der Veränderlichkeit der Figuren etwas Bedeutungsvolleres und auch für die Schule Fruchtbareres gewonnen ist, das wird leider selten bedacht. Und zugleich läßt man sich eine schöne Gelegenheit entgehen, durch die Betrachtung der Figuren als kontinuierlich variabler Gebilde die Raumanschauung zu üben.

5. Ich schließe eine Bemerkung über die darstellende Geometrie an, die im Reallehrplan auf den Primen als ein besonderes (von der Anleitung zum perspektivischen Zeichnen unterschiedenes) Lehrgebiet aufgeführt wird. Hier möchte ich vor allem hervorheben, daß es einen engeren und einen weiteren Sinn des Wortes „darstellende Geometrie" gibt. Mit der darstellenden Geometrie im engeren Sinne meint man das Operieren im sogenannten Zweitafelsystem, also diejenige Zeichenmethode, welche die räumlichen Gebilde in Grund- und Aufriß darstellt. Es ist die Lehre, die zuerst von *Monge* in seinen „Leçons sur la géométrie descriptive" von 1794 systematisch in der Form entwickelt wurde, wie sie im Fachunterricht zahlreicher Schulen auch heutigen Tags gelehrt wird, und die für die Praxis des Ingenieurs in der Tat ein unentbehrliches Hilfsmittel ist.

Sie kennen ja alle diesen Lehrgang, der mit der Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen beginnt und hernach in den Aufgaben über die Durchdringung komplizierterer räumlicher Gebilde gipfelt. Unter darstellender Geometrie im weiteren Sinne versteht man dagegen den Inbegriff aller der Regeln und Vorschriften, durch die sich die räumlichen Gebilde überhaupt konstruktiv beherrschen lassen. Dahin rechnet man also die verschiedenen Arten von Projektionen, insbesondere auch die Lehre von der schiefen Parallelprojektion, der sogenannten Axonometrie (deren sich die Mathematiker fast immer bei ihren räumlichen Figuren bedienen), weiterhin aber auch die Konstruktion räumlicher Modelle. Das ist das „stereometrische Zeichnen", wie es *G. Holzmüller* seit langem befürwortet hat.*)

Ich bin nun der Meinung, man sollte an den höheren Schulen die darstellende Geometrie durchaus im weiteren Sinne traktieren, die sich dann unmittelbar mit der Anleitung zum perspektivischen Zeichnen verbindet; denn gerade sie mit ihrer Vielseitigkeit der Auffassung scheint mir dem allgemeinen Bildungszweck dieser Anstalten zu entsprechen. Die darstellende Geometrie im engeren Sinne dagegen dürfte vielmehr ein geeigneter Unterrichtsgegenstand für Fachschulen sein. Dort ist sie ja in der Tat von größter Wichtigkeit, aber dort erhebt sie auch nicht den Anspruch auf besondere allgemein bildende Kraft. Demgemäß möchte ich an den bestehenden Lehrplänen der Realanstalten etwa wünschen, daß eine ausdrücklich auf den weiteren Sinn hinweisende Erklärung aufgenommen würde. Wie es bisher aufgefaßt wird, erkennen wir daraus, daß gegenwärtig an zahlreichen höheren Schulen eine fachmäßige darstellende Geometrie nach *Monge*scher Art floriert.

6. Endlich möchte ich an dieser Stelle noch einiges wenige über den mathematischen Zeichenunterricht sagen. Die Lehrstunden für diesen sind in die früher mitgeteilte Stundenbemessung des mathematischen Unterrichts nicht einbegriffen, so daß ich zunächst folgendes nachtragen muß. An den Realanstalten sind nach dem offiziellen Lehrplan neben den obligatorischen Zeichenstunden, die dem künstlerischen Zeichnen**) dienen, von Obertertia bis Oberprima je zwei fakultative Stunden mathematischen Zeichnens vorgesehen. Am Gymnasium ist das ganze Zeichnen von Untersekunda bis Oberprima wahlfrei; dort wird in erster Linie das künstlerische Zeichnen gepflegt; nur soweit das mathematische Zeichnen überhaupt betrieben werden kann, heißt es im Lehrplan (Seite 68), sollen einzelne Schüler, für

*) Einführung in das stereometrische Zeichnen, Leipzig (Teubner) 1886.

**) Die termini „mathematisches (Werkzeug- und Freihand-) Zeichnen" und „künstlerisches (Freihand-)Zeichen" scheinen das Wesen der Sache besser zu treffen als die üblichen Ausdrücke „,Linearzeichnen" und „Freihandzeichnen".

welche dieses Zeichnen von besonderem Wert ist, in die darstellende Geometrie eingeführt werden. Nun, das Zustandekommen des in Rede stehenden Unterrichts hängt offenbar sehr von den Verhältnissen der Anstalt und nicht zuletzt von der Persönlichkeit ihres Leiters ab. In beiden Fällen jedoch, für das Gymnasium wie für die Realanstalten, ist die vielfach erhobene Forderung, daß der mathematische Zeichenunterricht von einem Mathematiker gegeben werden sollte, durchaus berechtigt und verdient unsere volle Unterstützung. Am Gymnasium wären, meine ich, erforderlichenfalls das künstlerische und das mathematische Zeichnen als Parallelkurse einzurichten. —

Schließen wir damit unsere Kritik, meine Herren, und legen uns die Frage vor: Wie wollen wir es denn selber besser machen? Lassen Sie uns das in einem neuen Kapitel betrachten:

Sechster Abschnitt.

Reformvorschläge für die Oberklassen der höheren Schulen.

(Nebst Erörterung über die allgemeinen Fragen der Schulreform.)

Ich möchte Ihnen hier für die drei Oberklassen der höheren Schulen, und zwar vorab des Gymnasiums, ähnlich wie ich es bei der Besprechung der sechs Unterklassen tat, wieder das Stichwortschema eines mathematischen Reformlehrplans mitteilen, wie ich es mir auf Grund der dargelegten Anschauungen etwa denke. Ein ähnliches Stichwortschema hat auch dem ersten Entwurf eines neuen Lehrplans durch die Herren Professoren *O. Behrendsen* und *E. Götting* am hiesigen Gymnasium zugrunde gelegen, aus welchem dann nach mannigfacher Überarbeitung innerhalb unserer Breslauer Unterrichtskommission schließlich der Meraner Lehrplan*) hervorgegangen ist. Sie werden in den hauptsächlichen Punkten auch Übereinstimmung feststellen können.

Natürlich liegt es mir fern, ein solches Schema nun etwa zur allgemein verbindlichen Einführung empfehlen zu wollen, ebensowenig wie die Breslauer Kommission befürwortet, daß der Meraner Lehrplan in Bausch und Bogen amtliche Gültigkeit erhalten soll. Es handelt sich beidemal nur um Vorschläge, die wir zur Grundlage und Richtschnur für spätere neue Lehrpläne gemacht zu sehen wünschen. Gleichwohl sollen die Vorschläge durchaus nicht reine Idealkonstruktionen sein, also nicht Gedanken darüber, wie man einen mathematischen Unterricht überhaupt organisieren könnte, wenn man einmal ganz von vorn anfinge, sondern wir haben Reformen im Sinn, die wir innerhalb der gegebenen Verhältnisse für ausführbar halten.

---

*) Man vergleiche wieder den im Anhang B des vorliegenden Buches abgedruckten Meraner Lehrplan.

Ein besonderes Interesse aber gewinnen unsere Reformvorschläge für den mathematischen Unterricht dadurch, daß sie nach Genehmigung des preußischen Unterrichtsministeriums bereits an einer Reihe von höheren Schulen unter weitgehender Freiheit der Lehrer durchgeprobt werden: das sind die Gymnasien hier in Göttingen und im benachbarten Münden, ferner das Realgymnasium zu Düren im Rheinland und die Oberrealschulen zu Kiel und zu Königsberg. Hier haben sich die neuen Ideen, soweit bis jetzt ein Urteil zu fällen ist, gut bewährt; ich nenne Ihnen gern die seither erschienenen diesbezüglichen Publikationen der Herren, die an jenen Versuchsanstalten wirken: *W. Schmidt* (in Düren), Wie gewinnen wir für die Behandlung des Funktionsbegriffs Platz im mathematischen Unterricht?*); *A. Schülke* (in Königsberg), Über die Reform des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen**). Außerdem will ich noch bemerken, daß bei unserem Göttinger Ferienkurs 1906 ausführlich über die ganze Bewegung diskutiert wurde⁰), und aus der fast allseitigen lebhaften Zustimmung glaube ich auf eine erfreulich zunehmende Verbreitung der Reformideen für die Zukunft schließen zu sollen. —

Betrachten wir zunächst den Unterricht in Mathematik auf dem Gymnasium, für den ja auf jeder der drei Oberklassen vier Stunden angesetzt sind. Ich gebe Ihnen ein Schema an [Seite 129] und knüpfe sogleich einige Erläuterungen daran.

1. Der Aufbau des neuen Lehrplanschemas ist dem früher [Seite 38] für die sechs Unterklassen angegebenen analog. Auf einem Unterbau von zwei Pfeilern, „Arithmetik“ und „Geometrie“ erhebt sich jedesmal ein geschlossener Oberbau, der die Krönung des Unterrichts auf der Oberstufe bzw. der Unterstufe bildet. Dabei soll aber die Trennung in Arithmetik und Geometrie auf Sexta bis Untertertia und auf Obersekunda und Unterprima keineswegs eine innerliche Zerreißung des mathematischen Unterrichtsstoffes bedeuten. Vielmehr müssen in der Arithmetik immer graphische Darstellungen angewendet, in der Geometrie beständig auch analytische Formeln herangezogen werden. Die beiden Pfeiler — um noch einmal das Bild zu benutzen — sollen eben zur Erhöhung der Stabilität des Baues durch zahlreiche Querstreben verbunden sein.

2. Der Funktionsbegriff, der auf Obertertia in den Mittelpunkt des Unterrichts getreten war, bleibt auch weiterhin die zentrale

*) Schulprogramm 1906, Nr. 595 (Realgymnasium zu Düren).

) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **37 (1906), Seite 103—110.

⁰) Man vergleiche das Referat von *J. Schröder* in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **37** (1906), Seite 563—584.

Klasse	Gymnasium	
	Arithmetik	*Geometrie*
IIa	Die Exponential- und die Logarithmusfunktion und ihre Anwendungen; Einiges über quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten (mit weiterem Empirischen über Kegelschnitte).	Die trigonometrischen Funktionen und ihre Anwendungen: Einiges aus der neueren Geometrie (der Verwandtschaftsbegriff als Erweiterung des Funktionsbegriffs).
Ib	Zusammenfassende Betrachtung der vorgekommenen Funktionen, Herausarbeitung der Begriffe Differentialquotient und Integral an den Beispielen; Einiges aus der Kombinatorik.	Stereometrie und das Wichtigste aus der Projektionslehre; Einiges aus der sphärischen Trigonometrie; mathematische Erdkunde (einschließlich Kartenprojektionen).
Ia	Die Kegelschnitte, sowohl analytisch als synthetisch behandelt; mit Anwendung auf die Elemente der Astronomie; Wiederholende Einübung des gesamten Lehrstoffs der Schulmathematik, besonders an größeren Anwendungsaufgaben, die sowohl graphisch als numerisch durchgeführt werden; Rückblicke auf das System unter Hervorhebung auch feinerer Punkte; eventuell mit kleineren philosophischen Exkursen oder historischen Ausführungen.	

Idee; die Logarithmenlehre, die Trigonometrie usw., alles ordnet sich zwanglos diesem Gesichtspunkt unter. Auch mit der neueren Geometrie ist es so; der Begriff der Verwandtschaft als einer umkehrbar eindeutigen (stetigen) Punkttransformation soll dem Schüler als eine Verallgemeinerung des einfachen Funktionsbegriffs deutlich gemacht werden. Dazu befürworte ich, daß man nicht bloß von der projektiven Verwandtschaft spricht, sondern, um Einseitigkeit zu vermeiden, von vornherein auch die Transformation durch reziproke Radien als Beispiel heranbringt.

3. Bei Behandlung der fundamentalen transzendenten Funktionen auf Obersekunda sind (entsprechend wie auf der Unterstufe bei den einfachsten algebraischen Funktionen) die zugehörigen Kurven bereits nach ihrem Steigen und Fallen, nach ihrem Flächeninhalt usw. zu diskutieren. In Unterprima wird es dann auf eine Herausarbeitung der Begriffe des Differenzierens und Integrierens ankommen, die an speziellen Beispielen sozusagen schon unbewußt erworben sind. Man wird etwa zurückblicken, wie man früher bei den verschiedensten Kurven $y = f(x)$ die Lage der Tangente und eventuell den Flächeninhalt berechnet hat, und daraus ein allgemeines Verfahren — ich will sagen: in seiner Bedeutung mehr vermuten lassen als prinzipiell

zu seinen Feinheiten entwickeln. Damit, meine Herren, ist gewiß keine schwierige Infinitesimalrechnung für den Gymnasiasten verlangt, aber doch eine Ideenbildung vollzogen, die mir für jeden modernen Menschen als überaus wertvoll erscheint. Zahlreiche und vielseitige Beispiele aus der Geometrie und Physik sind geeignet, den Schüler mit jenen Denkweisen vollends vertraut zu machen.

4. Die Lehre von den Gleichungen ist gegenüber dem früher damit getriebenen Kultus stark beschnitten. Es muß genügen, wenn noch einfache Fälle von quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten behandelt werden. Aber auch hierbei sind alle Künstlichkeiten wegzulassen und die Wichtigkeit der graphischen Auflösung mit Gebrauch des Funktionsbegriffs von vornherein neben der formalen Behandlungsweise zu betonen. Zugleich dient der ganze Gegenstand als Vorbereitung auf die Lehre von den Kegelschnitten in Oberprima. Dort kann es dann dem Unterrichte nicht schwer fallen, der geometrischen und der rechnerischen Behandlung des Gegenstandes gleichmäßig gerecht zu werden.

5. Bei der formalen Behandlung der quadratischen Gleichungen wird man auch notwendig auf die komplexen Zahlen $a + ib$ geführt. Hier muß es darauf ankommen, daß bei ihnen der Eindruck des Unvernünftigen verschwindet, man wird sie vor allem mittels der *Gauß*schen Zahlenebene geometrisch zu deuten und das Rechnen mit ihnen auch in dieser geometrischen Weise klarzumachen haben. Ihre Nützlichkeit läßt sich hernach wohl am besten zeigen, wenn man die *Moivre*sche Formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

durch Schluß von n auf $n+1$ beweist.

6. Als wesentliche Ergänzung der Projektionslehre auf Unterprima ist das mathematische Zeichnen, sowohl Werkzeug- als Freihandzeichnen, gedacht. Daß dieser Gegenstand bereits in den eigentlichen mathematischen Unterrichtsstunden selbst nicht hintangesetzt werden soll, bedarf keiner besonderen Ausführung. Daneben aber, meine ich, wäre eine wohlwollendere Pflege des mathematischen Zeichenunterrichts sehr zu wünschen. Daß dieser unbedingt in den Händen eines Mathematikers liegen muß, wurde vorhin schon betont. Freilich muß man sich das Bedenken nicht verhehlen, daß zurzeit vielleicht erst wenige mathematische Lehrer vorhanden sind, welche diesen Zeichenunterricht geeignet zu erteilen vermöchten. Immerhin dürfen wir das hier zu erstrebende Ziel nicht aus dem Auge verlieren, uud ich glaube auch, daß die 1898 geschaffene Einrichtung der Lehrbefähigung für angewandte Mathematik in dieser Beziehung eine Aussicht auf Abhilfe gewährleistet.

7. Von hoher Wichtigkeit sind die auf Oberprima angesetzten umfangreichen Wiederholungen an größeren Übungsaufgaben praktischer Art. Es ist dies die Methode der „immanenten Repetition“, wie man sie genannt hat, die vor dem fortgesetzten äußerlichen Wiederholen des früher Erlernten den Vorteil bietet, daß sie nicht gleich Widerwillen beim Schüler verursacht. Vielmehr regt die neue Form beständig sein Interesse an, und die Behandlung der Aufgaben bringt bei ihm die Durcharbeitung des ganzen früheren Lehrstoffs sozusagen unvermerkt mit sich. Dabei ist nun der ganze Umkreis der Anwendungen hereinzuziehen, Anwendungen auf die Naturwissenschaften, auf die Technik, auf die Statistik usw.; und natürlich sollen die Übungsaufgaben sowohl graphisch als numerisch ausgeführt werden. Es ist ein Übelstand, daß die Abiturienten unserer höheren Schulen oftmals numerische Rechnungen oder etwa graphische Konstruktionen gar nicht anzugreifen wissen, ja vielleicht sogar beides nicht verstehen. Auch in dieser Beziehung wird die Lehrbefähigung für angewandte Mathematik von wachsendem Nutzen sein, indem sie dem angehenden Lehrer reiches Material für praktische Übungsaufgaben an die Hand gibt sowie ihn zu rechtem Gebrauch dieser Dinge qualifiziert. Und dahin sollte es, wie ich doch hervorheben will, meiner Meinung nach in Bälde kommen, daß die Mehrzahl der Mathematiklehrer an den höheren Schulen die facultas für reine und für angewandte Mathematik in sich vereinigen.

8. Die „Rückblicke“ in Oberprima sollen zur Abrundung des gesamten mathematischen Unterrichts dienen. Hier wäre wohl vor allem eine Systematik des erworbenen Wissens zu entwickeln, es wäre von den Methoden der Mathematik und ihrer Bedeutung innerhalb des Bereichs der Wissenschaften zu reden, soweit diese Dinge dem Verständnis des Schülers zugänglich sind. Man wird vielleicht auch auf feinere Punkte eingehen können: Zahlbegriff, Funktionsbegriff, Axiome — Entstehung, Klärung und Umbildung von Begriffen — man kann den Gegensatz von Logik und Anschauung verständlich machen, von ihrer Verträglichkeit sprechen und dergleichen mehr. Wenn der Lehrer philosophische Interessen und Fähigkeiten hat, so mag er bei Gelegenheit entsprechende Bemerkungen einflechten; hat er sich mit der Geschichte der Mathematik befaßt, so erzähle er den Schülern manchmal von solchen Dingen — immer natürlich vorausgesetzt, daß nicht Notwendigeres darunter leidet. Unser Lehrplan aber soll hier der Individualität des Lehrers recht weiten Spielraum lassen. Denn gerade auf der obersten Klasse ist es ja nur erwünscht, wenn dem Lehrer die Möglichkeit geboten wird, zu seinen Abiturienten vor ihrem Eintritt ins Leben eine engere persönliche Beziehung zu nehmen.

Übrigens möchte ich betreffs der erwähnten philosophischen Interessen noch bemerken, daß neuerdings stärker die Tendenz hervortritt, den Unterricht in philosophischer Propädeutik auf Oberprima wieder einzuführen*). An sich kann man diese Bestrebungen gewiß begrüßen. Aber, meine Herren, wir als Mathematiker müssen doch mit Nachdruck ein großes Bedenken aussprechen, wenn diese Propädeutik nicht innerhalb der übrigen Unterrichtsfächer, sondern als ein abgeschlossenes Fach zur Geltung gebracht werden soll. Lehrt sie nämlich ein Nichtmathematiker, dann ist es eigentlich immer so, daß die mathematische Seite ganz übergangen wird. Ich hege sogar gelinde Zweifel, ob es zurzeit viele Lehrer gibt, die es anders machen könnten! —

Nachdem ich Ihnen nun meine Reformvorschläge fürs Gymnasium auseinandergesetzt habe, wollen wir unsere Aufmerksamkeit einmal darauf richten, in welche Berufe denn die Abiturienten dieser höheren Schulen hernach eintreten; und müssen uns gemäß unserem allgemeinen Grundsatz fragen, ob für diese große Mannigfaltigkeit der neuentworfene Lehrplan, der den Funktionsbegriff in den Mittelpunkt rückt und bis zu den Elementen der Infinitesimalrechnung hinführt, eine geeignete Grundlage abgibt. Denn indem der leitende Gedanke die Rücksicht auf die allgemeine Bildung ist, werden wir es gleichwohl auch schätzen dürfen, wenn der von uns befürwortete Lehrgang Kenntnisse übermittelt, die den verschiedensten Abiturienten Vorteil gewähren. Eine extrem antiutilitarische Auslegung des Begriffs „Allgemeinbildung“ haben wir ja immer schon abgelehnt.

Die Statistik lehrt, daß von den Abiturienten der Gymnasien oder doch von denjenigen, die in die Oberstufe noch eintreten, etwa die Hälfte in „praktische Berufe“ übergeht (Kaufmannsberuf, Postfach, Offizierslaufbahn, Steuerfach usw.); ein Drittel kommt zur Universität und ein Sechstel zur technischen Hochschule. Die erstgenannte Hälfte kann gewiß mit unserem Lehrplan zufrieden sein; ich glaube, ich brauche darüber nichts weiter zu sagen. Reden wir also von den übrigen, von den späteren Besuchern der Hochschule; haben wir für diese, wo es nötig ist, bei unseren Vorschlägen hinreichend gesorgt? Um das zu prüfen, lassen Sie uns folgende vier Gruppen herausgreifen und der Reihe nach betrachten: 1. Die eigentlichen Mathematiker und überhaupt solche, die auf der Hochschule eingehenderen mathematischen Studien obliegen, wie die Physiker und Astronomen; 2. die übrigen Naturwissenschaftler, die sich im

*) Man vergleiche den Artikel „Philosophische Propädeutik“ von *A. Rausch* in den schon einmal [Seite 26] angeführten Handbuch für Lehrer höherer Schulen, Leipzig (Teubner) 1906, Seite 215—242.

Interesse ihres Fachstudiums ein wenig mathematisch ausbilden, und dazu die Techniker. Endlich die Gruppen der Studierenden, die zwar meist an der Universität gar keine Mathematik treiben und sie doch in einem gewissen Grade nötig hätten, das sind 3. die Mediziner und die Juristen, sowie 4. die Philosophen im engeren Sinne und solche, die sich mit Philosophie zu beschäftigen haben.

1. Die Anzahl derjenigen, die eingehender Mathematik studieren, ist im Verhältnis genommen recht gering. Wenn wir ein Achtel aller zur Hochschule Gehenden ansetzen, so haben wir reichlich gerechnet. Unter den Abiturienten der Gymnasien werden also im Durchschnitt kaum ein Sechzehntel künftige Mathematiker sein. Auf die Kleinheit dieser Zahl möchte ich Sie mit Nachdruck hinweisen und schließe die Bemerkung an, daß wir bei einer Organisation des mathematischen Unterrichts an der Schule für dieses kleine Häuflein durchaus nicht eine Vorzugsstellung verlangen dürfen. Meine Herren, wenn man als Universitätslehrer der Mathematik über Reform des mathematischen Schulunterrichts spricht, dann entsteht immer und immer bei den Fernerstehenden der Verdacht, daß man im eigenen Interesse rede und daß man für sich selbst geschickte Zuhörer heranbilden wolle. Demgegenüber muß ich energisch betonen, daß mir in erster Linie die Sorge für die mathematische Bildung der späteren Nichtmathematiker am Herzen liegt. Die Rücksicht auf die künftigen Mathematiker soll bei der Frage unserer Unterrichtsreform in keiner Weise den Ausschlag geben! Natürlich wird die von mir befürwortete Umgestaltung auch jenem Sechzehntel zugute kommen, daran wird man nichts aussetzen können. Insbesondere fallen die früher aufgewiesenen Diskontinuitäten zwischen Schule und Hochschule von selbst fort, und das „System des doppelten Vergessens“, wie ich es zu Beginn dieser Vorträge [Seite 1] nannte, hat dann ausgelebt — für die Ausbildung der Lehrer in der Tat eine sehr wesentliche Sache!

2. Was die Studierenden der Naturwissenschaften angeht, so ist es eine bekannte Sache, daß die Chemiker, zumal seit die physikalische Chemie auch für den gewöhnlichen Chemiker eine größere Bedeutung gewonnen hat, die Vertrautheit mit dem funktionalen Denken und mit der graphischen Darstellung, ja eine gewisse Kenntnis der elementaren Infinitesimalrechnung heutzutage nicht mehr entbehren können. Ähnlich bedürfen dieser Dinge auch die beschreibenden Naturwissenschaftler und die experimentellen Psychologen von heute allerwege, und sie haben begonnen, durch Aneignung mancher von der Mathematik vorgebildeten Denkweisen vielfach größere Deutlichkeit in ihre Forschungsergebnisse zu bringen, wie auch neue Anregungen aufzunehmen. Um den dringend-

sten Bedürfnissen nach Möglichkeit Rechnung zu tragen, haben wir hier in Göttingen seit einer Reihe von Jahren ein kleines Kolleg eingerichtet: „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften", das jeden Winter gehalten wird und in erster Linie für Chemiker (nicht insbesondere Physikochemiker) bestimmt ist. Der Nutzeffekt eines solchen Kollegs von zwei oder drei Wochenstunden ist aber niemals sehr groß. Damit dasselbe nicht mit Vorlesungen des eigentlichen Faches der Herren oder mit dem chemischen Laboratorium kollidiert, muß es ganz früh morgens oder ganz spät abends gehalten werden. Geschwänzt, meine Herren, wird natürlich in beiden Fällen. Denken Sie sich ein erstes Semester, das auf der Schule nichts von Funktionen oder vom Differentialquotienten gehört hat und sich nun unter den bezeichneten ungünstigen Nebenumständen so völlig neuartige Dinge in Kürze aneignen soll. Glauben Sie, daß bei ihm besonderes Streben vorhanden sein wird, in selbständiger Hausarbeit das Notwendige zu leisten? Glauben Sie, daß sich bei dieser Lage der Dinge irgendwo ein festes Wissen ergibt? Leider haben Schulpädagogen häufig die Neigung, solche Schwierigkeiten, die bei Verweisung des Gegenstandes an die Hochschulen herauskommen, zu ignorieren.

Auch bei den Technikern haben wir vielfach dieselbe Not. Diese müssen ja in den ersten Semestern ausführliche Anfangsvorlesungen über analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung hören. Plötzlich soll der junge Student all das, was auf der Schule „viel zu schwer" war, jetzt nebenher lernen. Dabei denken Sie bitte an den überfüllten Stundenplan der Studenten an der technischen Hochschule. Es ist offenbar im Sinne aller Beteiligten nur mit großer Freude zu begrüßen, wenn da die Schule die erste Einführung in jene wichtigsten mathematischen Grundbegriffe übernimmt. Die genannten Naturwissenschaftler wissen dann von der Schule her bereits so viel, wie sie etwa in ihrem Berufsstudium brauchen mögen. Für die angehenden Ingenieure aber sind die einleitenden mathematischen Vorlesungen soweit entlastet, daß sie wesentlich assimilierbarer und ertragreicher gestaltet werden können. — Und in der Tat, meine Herren, wieviel leichter läßt sich die Übermittelung jener fundamentalen Kenntnisse an der Schule machen! Dort haben wir den Zwang zum regelmäßigen Schulbesuch, dort den Zwang zur häuslichen Mitarbeit; und schließlich: dort ist auch die Zeit dafür vorhanden, da wir Minderwichtiges dafür streichen. Unser Reformlehrplan würde hier, wie Sie sehen, äußerst wichtigen Bedürfnissen Rechnung tragen.

3. Kommen wir zu den Medizinern, so stehts mit ihrer mathematischen Ausbildung zurzeit noch viel schlechter. Ich denke,

man sollte von einem Mediziner verlangen dürfen, daß er sich in physikalischen und vor allem in physiologischen Büchern zurechtfindet. Aber einen großen Teil versteht er jetzt gemeinhin nicht, denn dort wird von dem Funktionsbegriff und ähnlichen Dingen ausgiebiger Gebrauch gemacht. Man hat sich bisher mit allerhand Notbehelfen begnügt. Gehen Sie einmal als fortgeschrittener Mathematiker in das Kolleg über Experimentalphysik und studieren Sie, in welcher mißlichen Lage sich da der Dozent befindet. Er darf die Infinitesimalrechnung nicht voraussetzen und kann sie doch bei den einfachsten Dingen im Grunde nicht entbehren; er muß also bei jedem Grenzübergang viele Worte drum herum machen — die jungen Mathematiker, welche merken, um was es sich handelt, langweilt die Ausführlichkeit — die Mediziner aber lehnen es doch a priori als unverständlich ab; wenn der Dozent „sin α“ an die Tafel schreibt, wird ja schon gescharrt. Eine wieviel vernünftigere Sprache würde man reden können, wenn die Schule von vornherein zur Gewohnheit des funktionalen Denkens erzöge!

Ähnlich liegt der Fall bei den Juristen. In der Statistik, im Versicherungswesen läßt sich die Mathematik, die wir verlangen, heute nicht mehr entbehren. Man braucht fortwährend den Funktionsbegriff, man braucht Differentiation und Integration. Der Dozent darf aber gegenwärtig selbst die Rudimente davon nicht als bekannt voraussetzen, er hat in jedem einzelnen Falle von neuem viele Worte zu verlieren, indem er das Einfache kompliziert umschreiben muß, und verdirbt die Zeit. Auf solche Weise, meine Herren, lernt man vielleicht die mathematischen Tatsachen äußerlich kennen, man lernt Mathematik zugeben, aber nicht Mathematik verstehen und handhaben! Die Juristen würden also nicht minder als die Mediziner den größten Vorteil für ihr eigenes Studium gewinnen, wenn der Schulunterricht auf ein Verstehen der Fundamentalbegriffe „Funktion“, „Grenzwert“, „Differentialquotient“ usw. hinarbeitete, statt sie künstlich auszuschließen oder um sie herumzuführen.

4. Darf ich endlich noch ein Wort von der Philosophie sagen, so ist ja zwar die Anzahl derjenigen Abiturienten, die sich dem Spezialstudium dieser Wissenschaft widmen, außerordentlich gering; aber die Rücksicht auf die Bedürfnisse des philosophischen Studiums ist doch von Bedeutung, einmal wegen der eigenartigen Wichtigkeit des Faches, und sodann weil ein gewisses Maß philosophischer Kenntnisse von allen Lehramtskandidaten wie auch von den Theologen verlangt wird.

Ich bin nun durchaus der Überzeugung, daß eine moderne Philosophie, wenn sie diesen Namen verdienen will, nicht an der Mathematik als einer quantité négligeable vorbeigehen kann. Werfen wir

einen kurzen Blick auf die geschichtliche Entwicklung der Philosophie in den beiden letzten Jahrhunderten, so stellt sich allerdings eine mit der Verbreitung des Neuhumanismus zunehmende bedauerliche Entfremdung zwischen der Mathematik und Philosophie heraus. Die Philosophen des 18. Jahrhunderts — ich erinnere nur an *Kant* — sahen in der Mathematik eines der interessantesten und wichtigsten Objekte ihres Nachdenkens. Und so geht die Tradition von *Descartes* und von *Leibniz* her, bei denen man schwanken darf, ob sie als Philosophen oder als Mathematiker größer waren. Auch die ersten Neuhumanisten waren, wie ich erwähnte, von der hohen allgemeinen Bedeutung des mathematischen Denkens durchdrungen. Aber die vom Neuhumanismus getragene Philosophie des 19. Jahrhunderts wurde der Mathematik gänzlich abhold. Ich weise Sie z. B. auf den stark antimathematischen *Schelling* hin; *Schopenhauer*s Ausfälle gegen die Mathematik kennen Sie wohl.

Wie stark die Entfremdung zwischen den beiden Wissenschaften bis in unsere Zeit hinein nachwirkt, ersehen Sie daraus, daß z. B. in der Frage der nichteuklidischen Geometrieen bis heute zwischen uns und den Philosophen noch kein allseitiges Einvernehmen erzielt wurde, daß besonders auch hinsichtlich der Grundlagen der Infinitesimalrechnung gar zu häufig Mißverständnisse und Unklarheiten zu Tage treten. Wir als Mathematiker werden — abgesehen davon, daß wir selbst versprechen, uns den zeitgemäßen philosophischen Interessen nicht zu verschließen — die Forderung aufzustellen haben, daß ein Philosoph von heute (der auch ein Philosoph von morgen bleiben will) unbedingt den wirklichen Sinn jener mathematischen Denkweisen verstanden haben muß, um überhaupt irgendwann auf Mathematik exemplifizieren zu können. Es scheint mir sogar von wesentlicher Bedeutung, daß der Philosophiestudierende gewisse mathematische Grundideen recht frühzeitig kennen lernt und assimiliert, bevor ihn manche, nicht mehr so modulationsfähige Denkgewohnheiten hemmen. Auch hier wieder, glaube ich, leistet unser Reformlehrplan die Gewähr einer besonders zweckmäßigen Vorbildung. —

Nachdem wir bisher nur von der Mathematik gesprochen haben, müssen wir einiges über den naturwissenschaftlichen Unterricht sagen. An den höheren Schulen sind ja Mathematik und Naturwissenschaft gegenüber den sonstigen Fächern natürliche Bundesgenossen. Freilich hat die mathematische Wissenschaft auch unabhängig von jedem anderen Gebiet der menschlichen Erkenntnis ihre gute Bedeutung; sie hat nach den verschiedensten Seiten Beziehungen und ist rein philosophisch betrachtet durchaus nicht an irgend eine der Naturwissenschaften gebunden: die Mathematik ist an sich eine

reine Geisteswissenschaft*)! Aber gleichwohl, meine Herren, ist unser Zusammengehen mit den Naturwissenschaftlern, was gerade die höheren Schulen betrifft, nicht nur durch die Tradition gefestigt, sondern auch durch die gegenwärtigen Verhältnisse innerlich bedingt. Darum müssen wir hier wenigstens kurz auf den naturwissenschaftlichen Unterricht eingehen. Und darum finden Sie ja auch die Vertreter aller dieser Wissensgebiete in der Breslauer Kommission vereinigt.

Die Verhältnisse des naturwissenschaftlichen Unterrichts liegen zurzeit am Gymnasium wesentlich ungünstiger als bei der Mathematik. Der letzteren ist ja von Anbeginn des modernen Unterrichtswesens ein Maß an Stunden gewährt worden, mit dem man im großen und ganzen auskommen konnte; unsere neuen Reformvorschläge betreffen daher in mathematicis — bis auf die Forderung, die Einschnürung in den Tertien zu beseitigen [Seite 33f.] — nur eine zweckmäßigere Stoffauswahl und Stoffbehandlung nach geeigneten neuzeitlichen Gesichtspunkten. Die Naturwissenschaften dagegen müssen sich heute an unseren Gymnasien noch immer durchweg mit zwei Wochenstunden alle Klassen hindurch begnügen! In den oberen Klassen, auf die es uns besonders ankommen muß, wird die knapp bemessene Zeit fast ganz für Physik verwendet, und selbst dann hat man sich außerordentlich zu beschränken. Alle übrigen Naturwissenschaften, die Chemie, Mineralogie, Geologie, Botanik, Zoologie, Anthropologie — gestatten Sie mir, daß ich auch Hygiene und physiologische Psychologie erwähne —, sie alle kommen nach den amtlichen Lehrplänen entweder gar nicht zur Geltung oder werden doch nur ganz andeutungsweise abgetan.

Machen wir uns demgegenüber die hohe Bedeutung klar, die den Naturwissenschaften zukommt! Schon nach formaler Seite ist der pädagogische Wert dieser Fächer kaum zu hoch einzuschätzen. Wohl mit keinem Unterrichtsstoff ist die Schulung des induktiven Denkens so innig verbunden wie mit den Naturwissenschaften. Zudem ist es gerade in den Jahren der Entwicklung für den Menschen von größter Wichtigkeit, daß die Sinnesorgane, die uns den Zusammenhang von Innen- und Außenwelt vermitteln, geübt und gestärkt werden — daß die Fähigkeit, Erscheinungen richtig zu beobachten, richtig zu beschreiben und zu beurteilen, zur gehörigen Ausbildung gelangt. Und denken wir wieder

*) Man muß es als einen Mißgriff bezeichnen, wenn bei zahlreichen Klassifikationen der Wissenschaften, so z. B. auch in dem neuen enzyklopädischen Werke „Die Kultur der Gegenwart" (herausgegeben von *P. Hinneberg*, Leipzig (Teubner) seit 1906) die Mathematik prinzipiell mit den Naturwissenschaften zusammengeworfen wird.

an die Vorbildung für die späteren Berufe, so muß ich hinzufügen: An der Universität ist es eine alte Klage der Mediziner und der Naturwissenschaftler, daß an den höheren Schulen in der Verkümmerung der Sinnesorgane sehr viel gesündigt wird. Es wird gewiß keinem Abiturienten schaden, auch nicht dem angehenden Juristen, wenn er sich in klarer Beobachtung und sachlicher Beschreibung von Vorgängen einigermaßen geübt zeigt.

Unter realen Gesichtspunkten aber muß ein gründlicher naturwissenschaftlicher Unterricht an den höheren Schulen darum unerläßlich erscheinen, weil er eine große Menge für jeden Gebildeten wichtiger Kenntnisse zu übermitteln hat, und — noch immer mehr haben wird. Von dem wertvollen Wissen der physikalischen und chemischen Hauptgesetze will ich gar nicht sprechen. Nur auf den biologischen Unterricht soll noch besonders hingewiesen sein. Er erzieht einerseits zu einem tiefergehenden Verständnis des menschlichen Körpers und seiner hauptsächlichsten Funktionen; und dies hat ohne Zweifel für die allgemeine Hygiene eine außerordentliche Bedeutung. Andrerseits aber wird der heranwachsende Mensch so auch den Gedanken der Entwicklung im organischen Leben, der für die Bildung einer Weltanschauung so wesentlich ist, erst recht verstehen und beurteilen lernen; und darin liegt wiederum ein hoher ethischer Wert!

Endlich möchte ich noch kurz der überaus wünschenswerten praktischen Schülerübungen gedenken. Der ideale Grundgedanke solcher Praktika ist, meine Herren, daß der Lehrer den Schülern dort nicht in fertiger Form die Kenntnisse übermittelt, sondern der Schüler unter der Anleitung des Lehrers die Wissenschaft sozusagen noch einmal selbst entdeckt. In der Mechanik z. B. wird der Schüler an die Fallmaschine gestellt, er vergleicht die Fallzeiten t und die Fallräume z und muß dann daraus die Abhängigkeit $z = \frac{gt^2}{2}$ empirisch finden. Ein so durch eigene Erfahrung gewonnenes Gesetz erscheint von vornherein mit all den tatsächlichen Verhältnissen assoziiert, unter denen es zur Wirkung gelangt, und es haftet darum gewiß fester im Gedächtnis als ein bloß erlerntes.

Aber auch auf einige Schwierigkeiten will ich Sie hinweisen, damit Sie sehen, was es bei der Einrichtung dieser im übrigen vortrefflichen Praktika doch zu bedenken gibt. Einerseits ist nicht zu leugnen, daß man bei dieser Methode nur ziemlich langsam vorwärts kommen kann und man sich also auf eine engere Auswahl des Stoffes beschränken muß. Andererseits wird bisweilen von Lehrern geklagt, daß bei großen Klassen in einem Praktikum schwer Disziplin zu halten sei. Sie werden ja selber wissen, wie es die bösen

Schüler dann machen. Wenn sich der Lehrer im chemischen Praktikum just mit einem einzelnen besonders beschäftigt, wird hinter seinem Rücken schleunigst eine kleine Schlacht mit der Spritzflasche ausgefochten. — Übrigens mag es an kleineren Anstalten häufig auch an geeigneten Arbeitsräumen fehlen, usw. Jedenfalls gibt das Thema der Schülerpraktika, so einleuchtend ihr Wert ist, allerlei zu überlegen, und in einer ansehnlichen Zahl von Aufsätzen werden bereits diese Fragen behandelt. Ich nenne Ihnen besonders die Schrift von *H. Hahn*: Wie sind die physikalischen Schülerübungen praktisch zu gestalten?*) Weitere Literatur wird in dem interessanten Artikel „Der Unterricht in Physik" von *E. Grimsehl* in Teubners „Handbuch" [zitiert Seite 26] nachgewiesen (dort Seite 528 bis 548).

Wollen Sie sich überhaupt hinsichtlich der aktuellen Fragen des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen aus der Literatur sachgemäß unterrichten, so empfehle ich Ihnen außer dem eben genannten Artikel die im Anschluß an die Hamburger Naturforscherversammlung 1901 entstandene Schrift: Über die gegenwärtige Lage des biologischen Unterrichts an den höheren Schulen**); sodann die Broschüre, die *M. Verworn* im Sommer 1904 im Hinblick auf die Breslauer Naturforscherversammlung herausgegeben hat: Beiträge zur Frage des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen⁰); und im Anschluß hieran mögen Sie die [Seite 5 erwähnte] Rede von *F. Merkel* auf der Breslauer Versammlung vergleichen: Wünsche betreffend den biologischen Unterricht⁰⁰). Endlich müssen Sie besonders die eingangs [Seite 6] zitierten Meraner und Stuttgarter Reformvorschläge der Breslauer Unterrichtskommission hierzu studieren.

Damit kommen wir jetzt zu der Frage, meine Herren: Wie stellt sich zu den gegenwärtigen Verhältnissen des naturwissenschaftlichen Unterrichts die Breslauer Kommission? Nun, um der Bedeutung der Naturwissenschaften an den höheren Schulen gerecht zu werden, ist sie überzeugt, folgendes Maß an Lehrstunden verlangen zu müssen: Dem Physikunterricht, der wegen der großen Zahl der in ihm zu vollziehenden Begriffsbildungen und wegen der besonderen Mannigfaltigkeit des Gedanklichen eine gewisse Prävalenz beanspruchen

*) Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaften (als Sonderhefte der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht), 4. Heft, Berlin (Springer) 1905.

**) Jena (Fischer) 1901.

⁰) Mit Aufsätzen von *W. Detmer, R. Hertwig, M. Verworn, H. Wagner, J. Wagner* und *J. Walter*, Jena (Fischer) 1904.

⁰⁰) Abgedruckt in der Physikalischen Zeitschrift, Leipzig (Hirzel), **5** (1904), Seite 717—720; auch in dem von *A. Wangerin* herausgegebenen Heft: Verhandlungen der Breslauer Naturforscherversammlung über den naturwiss. und math. Unterricht an den höheren Schulen, Leipzig (Vogel) 1905, Seite 45—50.

darf, will die Kommission drei Wochenstunden unbedingt zuerkennen. Neben dem physikalischen Unterricht aber sollen auch die übrigen Naturwissenschaften mit einer für sie geeigneten Stundenzahl gepflegt werden: einerseits die Chemie mit der Mineralogie, andererseits die sogenannten biologischen Fächer (Botanik, Zoologie, Anthropologie) mit der Geologie. Nach dem Urteil der Naturwissenschaftler in der Breslauer Kommission ist das Minimum der zu fordernden Stundenzahl, um einen wahrhaft nutzbringenden Unterricht zu ermöglichen, für jeden dieser beiden Zweige zwei Wochenstunden durch alle Klassen hindurch. Für den gesamten naturwissenschaftlichen Unterricht erkennt damit die Kommission an allen höheren Schulen sieben Wochenstunden für jede der oberen Klassen als unerläßlich! Die Zeit zu praktischen Schülerübungen in den verschiedenen Fächern, im ganzen zwei Wochenstunden, ist darin noch nicht einmal einbegriffen. Für die Gymnasien, wo zurzeit ja nur zwei Wochenstunden zur Verfügung stehen, würde das also eine erhebliche Vermehrung der naturwissenschaftlichen Stundenzahl bedeuten. Wie sich diese ermöglichen ließe, dafür hat die Breslauer Unterrichtskommission zunächst keinen Vorschlag gemacht. Sie begnügt sich hier vorerst mit der starken Betonung des sehr bedauerlichen Mißstandes.

Ich persönlich weiche nun hier mit meiner Überzeugung von der Majorität der Kommission ein wenig ab. Ich meine, daß die humanistischen Gymnasien in einer spezifisch ausgestalteten Minderheit unter den höheren Schulen sich mit einem dreistündigen naturwissenschaftlichen, und zwar vorzugsweise physikalischen Unterricht begnügen dürften. Für die übrigen höheren Schulen, die Realanstalten, stimme ich selbstverständlich der Forderung eines breiten naturwissenschaftlichen Unterrichts mit sieben Wochenstunden zu. Meine Stellungnahme hängt allerdings an der gegenwärtig durchaus nicht erfüllten Voraussetzung, daß die humanistischen Gymnasien eine entschiedene Minderzahl unter den höheren Schulen bildeten; ich werde auf die hier zu erhebende Forderung hernach zurückkommen. Einigermaßen günstiger dagegen, meine Herren, als an den Gymnasien liegt die Sache an den Realgymnasien und Oberrealschulen, zu deren Betrachtung wir uns sogleich wenden wollen. In der Tat wird hinsichtlich des naturwissenschaftlichen Unterrichts das nächstliegende Ziel unserer Reformpläne sein, an den Realanstalten nun vorab den naturwissenschaftlichen Unterricht in der erforderlichen Weise auszugestalten. —

Gehen wir jetzt also zu den Reformvorschlägen betreffs Mathematik und Naturwissenschaften an den Realanstalten über. Ich erinnere Sie noch einmal [Seite 100] an die Verteilung der Unterrichtsstunden für die Mathematik und die Naturwissenschaften,

wie sie die amtlichen Lehrpläne von 1901 an den höheren Schulen vorschreiben:

Mathematik	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summe
Gymnasium	4	4	4	3 (+1)	3 (+1)	4 (+1)	4	4	4	34
Realgymnasium . . .	4	4	4	5	5	5	5	5	5	42
Oberrealschule	5	5	6	6	5	5	5	5	5	47

Naturwissenschaften	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summe
Gymnasium	2	2	2	2	2	2 (+1)	2	2	2	18
Realgymnasium . . .	2	2	2	2	2	4	5	5	5	29
Oberrealschule	2	2	2	2	4	6	6	6	6	36

Betrachten wir die Gesamtstundenzahlen für Mathematik 34, 42, 47 und für Naturwissenschaften 18, 29, 36. Hier bin ich der Ansicht, meine Herren, daß die allgemeine Notlage der Naturwissenschaften uns Mathematiker zu einem gewissen Opfer bereit machen sollte, so schwer der Entschluß zunächst fallen mag. In der Tat habe ich bei der Breslauer Unterrichtskommission den Vorschlag eingebracht, der auch aufgenommen wurde: Das Realgymnasium solle sechs Stunden Mathematik den Naturwissenschaften abtreten, und zwar für jede der sechs obersten Klassen eine Stunde! Gewiß wird dieser Vorschlag von mathematischer Seite einigem Widerspruch begegnen. Aber die hier angebahnte Stärkung des naturwissenschaftlichen Unterrichts schien mir daselbst allerdings doch noch wertvoller als das, was wir opfern: die gegenüber dem Gymnasium immerhin geringe Steigerung der mathematischen Leistungen.

Sehen wir zu, wie sich nach vollzogener Verschiebung unsere Schemata ausnehmen:

Mathematik	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summe
Gymnasium	4	4	4	3	3	4	4	4	4	34
Realgymnasium . . .	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
Oberrealschule	5	5	6	6	5	5	5	5	5	47

Naturwissenschaften	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Summe
Gymnasium	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18
Realgymnasium . . .	2	2	2	3	3	5	6	6	6	35
Oberrealschule	2	2	2	2	4	6	6	6	6	36

Welche Konsequenzen ergeben sich daraus? Wie sie erkennen, ist nach der Verschiebung an den beiden Realanstalten die Gesamtstundenzahl für Naturwissenschaften ziemlich dieselbe, und in der Mathematik stimmen ihrerseits Gymnasium und Realgymnasium im wesentlichen überein. Damit ist jedenfalls schon einmal eine große Vereinfachung im schultechnischen Sinne erreicht!

Ich befürworte nun zunächst, daß das Realgymnasium geradezu denselben mathematischen Lehrplan annimmt wie das Gymnasium; was das letztere an mathematischen Stunden zurzeit noch weniger hat, betrifft eben wieder jene unliebsame Einschnürung auf den Tertien, deren baldigste Beseitigung wir ohnehin postulierten [Seite 33f.]. Mit vier Stunden Mathematik durch alle Klassen werden aber das humanistische wie das Realgymnasium in der Mathematik, wie aus dem vorhin Gesagten klar geworden sein dürfte, etwas in sich Abgerundetes leisten können. Natürlich schließt der für beide Anstalten gleichlautende Lehrplan keineswegs aus, daß nicht die Färbung des Unterrichts doch hier wie dort dem spezifischen Gesamtcharakter der Anstalt anzupassen wäre; im Gegenteil!

Ferner, meine Herren, erreichen wir, wie schon gesagt, daß das Realgymnasium über annähernd dieselben Stundenzahlen für den naturwissenschaftlichen Unterricht verfügt wie die Oberrealschule. Das bedeutet ohne Zweifel eine nicht zu unterschätzende Förderung des Realgymnasiums. Jedenfalls können wir dann an den beiden Realanstalten schon bei der heute gegebenen Stundenbemessung einen ziemlich gleichwertigen naturwissenschaftlichen Unterricht organisieren, der von dem Ziel, das die Breslauer Kommission für die höheren Schulen überhaupt aufgestellt hat, zwar noch ziemlich entfernt ist, der aber doch einen Fortschritt gegen den bisherigen Zustand bedeutet. Da nach dem Urteil der Breslauer Kommission für den erforderlichen naturwissenschaftlichen Unterricht noch eine weitere Stunde unbedingt notwendig ist, nun so wird es den Anstalten gewiß zugute kommen, daß sie mit ihren Ansprüchen geschlossen auftreten und gemeinsam nach Zugeständnissen von andrer Seite streben können.

Wie man übrigens einen gehobenen naturwissenschaftlichen Unterricht in der Art, wie wir ihn wünschen müssen, etwa einrichten kann,

das mag Ihnen das Beispiel zweier außerpreußischer Oberrealschulen zeigen, auf die ich Sie hinweisen will. Das eine ist die Oberrealschule zu Bremen, die aus dem Lehrplan der alten Realschule erster Ordnung die Durchführung der „Naturgeschichte" mit je zwei Stunden von Sexta bis Obersekunda beibehalten hat. Die Physik wird von Untersekunda bis Oberprima dreistündig unterrichtet. Der Chemie sind in den Sekunden je zwei Stunden gewidmet; in den Primen hat die Chemie, welche hier noch biologische Kapitel und einen geologischen Kursus einschließt, je drei Stunden. An der Oberrealschule vor dem Holstentore zu Hamburg andrerseits ist im Jahre 1905 der Lehrplan seitens der Oberschulbehörde neugeordnet worden. Seitdem werden in den drei obersten Klassen je sieben Stunden den Naturwissenschaften eingeräumt, wovon je drei auf die Physik, drei bzw. zwei auf die Chemie und eine bezw. zwei auf die Biologie (einschließlich Geologie) entfallen; dabei sind die Praktika, die an der genannten Anstalt in besonderem Maße entwickelt sind, noch nicht einbegriffen. — Natürlich lassen sich auch andere Verteilungen des Unterrichtsstoffes denken. Wenn man indes einmal von Reformen im naturwissenschaftlichen Unterrichte spricht, so erscheint eine Bekanntschaft mit solchen Vorbildern sehr wünschenswert*). —

Des weiteren aber bin ich der Meinung, der Verzicht auf ein höheres mathematisches Lehrziel am Realgymnasium führt uns ganz von selbst dahin, daß wir ein solches nunmehr für die Oberrealschule verlangen. Dort steht eine erhebliche Anzahl von Stunden Mathematik mehr zur Verfügung als an den beiden anderen Anstalten. Es erscheint mir wirklich unangebracht, wenn man, wie die bestehenden Lehrpläne tun, nur hie und da kleine wenig wichtige Kapitelchen einschiebt und anhängt, ohne dem Schüler eine entsprechende Mehrleistung in mathematischer Hinsicht zuzutrauen. Stattdessen befürworte ich, die Oberrealschule solle ihre Zöglinge ein gewisses Stück in die analytische Geometrie und in die Infinitesimalrechnung führen.

Prinzipiell stehen dem keine Bedenken entgegen. Die Einführung in die Grundideen dieser Gebiete wurde ja bereits in unserem enger umgrenzten Reformlehrplan für Gymnasium und Realgymnasium vorgesehen. Es handelt sich also nur um die zweckmäßige Weiterausgestaltung dieses Unterrichts, die unter dem Gesichtspunkte des spezifischen Charakters der Oberrealschule von besonderem Wert ist. Von irgendwelchen übertriebenen Anforderungen an die mathematischen Fähigkeiten der Jugend ist dabei, soweit ich mitzusprechen habe, selbstverständlich nicht die Rede, sondern der Unterrichtsplan soll

*) Man vergleiche Jahresberichte der hier genannten Anstalten.

wie an den höheren Schulen überhaupt — ich will das doch ausdrücklich hervorheben — stets der Begabung des Durchschnitts einer Klasse angepaßt sein!

Auch schultechnisch hat die Einrichtung des Lehrplans der Oberrealschule nach diesen Leitgedanken keine Schwierigkeit. Da die zur Verfügung stehende Stundenzahl von vornherein viel größer ist als an den übrigen Anstalten, so wird sich eine Verschiebung des gesamten mathematischen Unterrichts nach unten hin empfehlen, falls man nicht mit Rücksicht auf das zurzeit noch häufig schlechtere Schülermaterial eine breitere Stoffbehandlung auf den unteren und mittleren Klassen vorzieht. Eventuell würde man im Hinblick auf den Abschluß nach Untersekunda [vergleiche Seite 19f. und 39] die Anfänge der Trigonometrie, der Stereometrie, und die Logarithmenlehre vor denselben legen können. In jedem Falle bleibt der Oberstufe ausreichend Zeit, die Lehre vom Funktionsbegriff weiter auszubauen und in eine maßvoll ausgedehnte analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung (ohne vorherige algebraische Analysis) überzuleiten. Dabei ist jede Diskontinuität ausgeschlossen, der Unterricht der Primen wächst organisch aus dem vorhergehenden heraus und könnte meines Erachtens gut bis zu einem Verständnis der endlichen Taylorschen Reihe sowie zu einer befriedigenden Ableitung der Keplerschen Planetenbewegung und der kleinen Pendelschwingungen aus dem Newtonschen Anziehungsgesetz hinführen. Wie ich mir die Behandlung dieser Gegenstände denke, darauf werde ich im zweiten Hauptteil meiner Vorträge zurückkommen.

Daß etwas Infinitesimalrechnung an einer Reihe von Schulen seit langem gelehrt worden ist und noch gelehrt wird, habe ich bereits erzählt, als wir von der Infinitesimalrechnung auf den höheren Lehranstalten überhaupt sprachen [Seite 116f.] Aber auch ein ausgedehnterer Unterricht in analytischer Geometrie und Infinitesimalrechnung bedeutet an Schulen durchaus nichts unerhört Neues. An zahlreichen außerpreußischen Oberrealschulen, so in Hamburg und besonders in Württemberg, wird die hier angedeutete Höhe längst erreicht. Die württembergischen Oberrealschulen überschreiten sogar mit ihren neun Stunden Mathematik auf der obersten Klasse*), von denen drei der Analysis (Infinitesimalrechnung), zwei der analytischen Geometrie, drei der darstellenden Geometrie und eine der sphärischen Trigonometrie (einschließlich mathematischer Erdkunde) zuerteilt sind, erheblich das Stundenmaß, daß ich für die Ober-

*) Ich beziehe mich hier auf die neueste württembergische Schulreform von 1906; früher waren es zehn Stunden.

realschule empfahl; und es ist nicht zu verwundern, wenn daneben die Naturwissenschaften weniger gut bedacht sind mit drei Stunden Physik und Chemie und zwei Stunden „Naturbeschreibung“. Die Oberrealschule vor dem Holstentore zu Hamburg ihrerseits, auf die ich vorhin [Seite 142f.] wegen ihres naturwissenschaftlichen Unterrichts verwies, führt ihre Schüler ebenfalls ein gutes Stück in die analytische Geometrie und die Differential- und Integralrechnung hinein; und zwar hat sie nach ihrem Lehrplan auf den Oberklassen fünf Stunden „Mathematik“ und zwei Fakultativstunden darstellende Geometrie, also genau dieselbe Zeit, welche die Oberrealschullehrpläne für Preußen vorschreiben. Übrigens ist auch an mehreren preußischen Realanstalten dank einigen entschlossenen Schulmännern unseres Faches ein in der bezeichneten Richtung gesteigerter mathematischer Betrieb seit langer Zeit üblich.

Nur dürfen Sie den [Seite 117f.] erwähnten durchgreifenden Unterschied nicht vergessen, worin wir mit unseren neuen Plänen von den jetzt gültigen abweichen. Während bisher analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung dem übrigen mathematischen Schulpensum als ein besonderes oberstes Stockwerk aufgesetzt erscheinen, handelt es sich bei uns um eine tiefgehende organische Einarbeitung dieses Bildungsstoffes in die sonstigen Lehraufgaben. Derselbe ist ja dadurch, daß der Funktionsbegriff an allen höheren Schulen in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts gerückt wird, innerlich vollständig vorbereitet und ergibt sich — wie am Gymnasium und Realgymnasium mehr in der Andeutung, so an der Oberrealschule in breiterer Ausführung — im Aufbau des Ganzen geradezu von selbst!

Doch warum treten wir so eifrig für ein solches höheres mathematisches Lehrziel der Oberrealschule ein? Wir haben uns vorhin auf die zur Verfügung stehende größere Stundenzahl berufen. Nun, dem wäre ja schließlich auch durch einen Verzicht auf dieses Plus abzuhelfen, der von seiten der Nichtmathematiker zunächst jedenfalls mit Dank angenommen würde. Ist denn jene Weiterführung der Oberrealschüler in mathematischer Hinsicht wirklich zu wünschen? Meine Herren, ich glaube dies energisch bejahen zu sollen; und zwar erwächst mir diese Überzeugung aus folgenden Gründen.

Zu dem Ziel einer wirklichen Allgemeinbildung, das bei unserer Kritik und den Reformvorschlägen für den Unterricht der höheren Schulen immer den leitenden Gedanken abgab, läßt sich ohne Zweifel die gehörige formale Schulung nach seiten der Logik nicht entbehren. Während nun auf dem Gymnasium und Realgymnasium der Unterricht in lateinischer Grammatik zur logischen Ausbildung seinen bedeutenden Beitrag liefert, muß an der lateinlosen Oberrealschule

diese Aufgabe hauptsächlich von der Mathematik geleistet werden. Nicht als ob der Lehrer an der Oberrealschule gehalten sei, einem Formalismus strenger Observanz zu huldigen; das wäre der alte schlimme Fehler, der die Mathematik früher viele Freunde gekostet hat. Aber man wird bei Wahrung des genetisch aufbauenden Unterrichts gleichwohl den allgemein formal bildenden Wert der Mathematik zur Geltung bringen. Von den neueren Sprachen kann eben diese Bedeutung nicht in gleichem Maße wie von den alten Sprachen in Anspruch genommen werden, und ich muß es für durchaus falsch halten, wenn man denkt, die Oberrealschule allein durch den Unterricht der lebenden Sprachen, wo diese doch natürlich nicht mehr vorwiegend grammatisch betrieben werden, dem Gymnasium gleichwertig zu machen. Hier erscheint mir der mathematische Unterricht mit höher gestecktem Lehrziel als eine große Notwendigkeit.

Dieselbe Forderung ergibt sich auch unter realem Gesichtspunkt. Nach dem Prinzip der Schulreform von 1900 soll, wie ich früher schon [Seite 96] ausführte, jede der drei höheren Schulen an einem spezifischen Lehrstoff die besagte Allgemeinbildung erzielen. Nun, um einen solchen Lehrstoff handelt es sich ja. Von „Fachbildung“ — darauf muß ich immer wieder aufmerksam machen — kann bei dem hier befürworteten Unterricht in analytischer Geometrie und Infinitesimalrechnung gar nicht die Rede sein, obschon angesehene Mathematiker, denen unsere Stellungnahme aus irgend einem Grunde nicht paßt, diesen Ruf leider haben erschallen lassen! Ich wünschte den betreffenden Herren ein etwas stärker ausgeprägtes Selbstbewußtsein. Sie mögen sich darüber klar werden: die Aneignung des funktionalen Denkens, das Erfassen der Idee der Grenzübergänge und eine darauf gegründete Erziehung zur Naturerkenntnis und zum Kulturverständnis — das ist vom Standpunkte der heutigen allgemeinen Bildung vollauf ein Äquivalent etwa dafür, daß man antike Literatur im Original kennen lernt. Wenn Sie, meine Herren, Oberrealschüler sind, und der Humanist rühmt sich vor Ihnen, er könne Sophokles auf griechisch lesen, so zeigen Sie ihm nur, daß Sie von der Schule her die Ableitung der Keplerschen Regeln aus dem Newtonschen Gesetz begreifen — und dann stehen Sie ebenso groß neben ihm, wie er neben Ihnen! Sie beide haben etwas von dem Besten kennen lernen, was der menschliche Geist geschaffen hat.

Endlich müssen wir im Auge behalten, daß die Oberrealschüler zugleich eine zweckmäßige Vorbildung für gewisse Berufe erhalten sollen. Dies hat natürlich nicht mehr als bei den Gymnasiasten so zu sein, aber auch nicht weniger. Der angehende Ingenieur, der angehende Naturwissenschaftler, für den die Absolvierung einer Ober-

realschule das Nächstliegende ist, darf verlangen, daß er dort in der Mathematik eine geeignetere Vorbildung für sein Studium genießt — genau so wie für das Studium dieser oder jener Fächer die Gymnasialvorbildung die vorteilhaftere bleiben wird. Es ist nur immer der alte Irrtum hinderlich, daß auch der bescheidenste Gedanke an Nützlichkeitsrücksichten auf den höheren Lehranstalten a priori verwerflich sei. Diese Angst vor der Utilität sollte man in der Tat heutzutage überwunden haben. Ich bin überzeugt, die Spezifizierung der Unterrichtswege an den höheren Schulen führt notwendig auch zu einer Unterscheidung der Abiturienten der drei Anstalten für den Beginn des Hochschulstudiums. Wer die für sein Studium zweckmäßigste Vorbildung erhalten hat und dabei nicht zurückgeblieben ist, der darf billigerweise eine entsprechende Abkürzung des sonstigen Studienganges beanspruchen.

Wir rühren damit an eine wichtige Seite des modernen Lebens, die bei allen Fragen der Schulorganisation mehr berücksichtigt werden sollte, als vielfach geschieht. In Deutschland hat sich in den letzten Jahrzehnten allmählich ein Übelstand herausgebildet, der auf die Dauer zu einer ernsten Schädigung der Nation führen muß. Unsere jungen Männer, die zur Hochschule kommen, gelangen infolge der gesteigerten Anforderungen, welche jedes Fachstudium an die Fähigkeiten des einzelnen stellt, viel zu spät in selbständige Stellungen. Die amtlichen Bestimmungen verlangen allerdings vielfach noch immer ein bloß dreijähriges Studium; man spricht vom akademischen Triennium. Aber wie selten ist es, daß ein Studierender wirklich nach drei Jahren Universitätsbesuch abschließen kann! Die Mathematiker z. B. werden meist acht oder zehn Semester alt, bei den Medizinern ist die Ausdehnung der Studienzeit noch mehr gewachsen. Was ist die Folge? Die große Mehrzahl der jungen Leute kommt kaum früher als mit dreißig Jahren in feste Stellung und dann, meine Herren, pflegt das beste dahin zu sein: der frische Lebensmut und die Kraft, etwas Eigenes zu gestalten, sind durch die lange Zeit der Unselbständigkeit gelähmt — oft für immer.

Aus solchen Erwägungen heraus, meine ich, sollten wir es lebhaft begrüßen, wenn sich irgendwo eine Gelegenheit bietet, daß man das normale Hochschulstudium unbeschadet seines wissenschaftlichen Charakters abkürzen kann. Und eine solche Abkürzung ist unbedingt zu ermöglichen, wenn man nur das Prinzip der spezifischen Allgemeinbildung in konsequenter Weise zur Durchführung bringt. — Ich hörte neulich von pädagogischer Seite die Ansicht äußern: man solle an den höheren Schulen zehn Klassen einrichten, „man könne dann viel mehr bringen“. Nun, das letztere ist zweifellos richtig. Auch an der Universität kann man viel mehr

lernen, wenn man zehn Jahre studieren muß. Ob aber die spätere Lebensleistung der Studierenden durch einen solchen Zwang gestärkt wird, das ist doch die Frage — oder vielmehr, meine Herren, es ist nicht die Frage!

Es gibt einen Platz in Deutschland, wo die Einrichtung, wie ich sie im Sinn habe, schon lange besteht und hoffentlich durch die jetzt um sich greifende Gleichmacherei nicht bedroht wird. Das ist die technische Hochschule in Stuttgart. Hier werden die eintretenden Studierenden hinsichtlich ihrer mathematischen Vorbildung in drei Klassen unterschieden: 1. Abiturienten eines württembergischen Realgymnasiums oder einer württembergischen Oberrealschule, 2. Abiturienten von nichtwürttembergischen Realanstalten und 3. Abiturienten humanistischer Gymnasien. Bei den erstgenannten erkennt man den Vorsprung, den sie nach mathematischer Seite vor anderen Abiturienten haben, ausdrücklich an; auf Grund ihrer mathematischen Kenntnisse erläßt man ihnen die Anfangsvorlesungen der beiden ersten Semester. Die an zweiter und dritter Stelle Angeführten müssen bezüglich ein oder zwei Semester länger studieren. Ich erwähne diese württembergischen Verhältnisse hier, so sehr sie in Einzelheiten angefochten werden mögen, weil sie ohne Zweifel eine allgemeinere Beachtung verdienten. Jedenfalls zeigen sie, daß unsere gemachten Vorschläge nicht von vornherein nach Utopien zu verweisen sind. Freilich ist hier zu einer gedeihlichen Umgestaltung ein gewisses Entgegenkommen der Hochschulen erforderlich, und das wird noch Kämpfe kosten, weil es sich um Abänderungen alter Gewohnheiten und um Verschiebungen persönlicher Interessen handelt*). —

Meine Herren, nachdem wir uns im Vorhergehenden ausführlicher mit den Reformvorschlägen für die Realanstalten beschäftigt haben, komme ich nun auf die zuvor [Seite 140] gestreifte Gymnasialfrage zurück. Denken wir uns einmal alle bisher besprochenen Reformideen zusammengefaßt und in schulgemäßer Durcharbeitung ausgeführt, dann können wir noch immer nicht sagen, daß in unserem höheren Schulwesen der bildende Wert der von uns vertretenen Fächer in jeder Hinsicht befriedigend zur Geltung gebracht ist. Es bleibt vorderhand der außerordentliche Mißstand bestehen, daß von der Gesamtheit unserer höheren Schulen eine viel zu große Anzahl

*) In naturwissenschaftlicher Hinsicht werden den Realabiturienten keinerlei Vorteile an der Stuttgarter Hochschule gewährt. Da sich hier die Dozenten durchaus ablehnend verhielten, hat sich denn auch die württembergische Oberschulbehörde nicht veranlaßt sehen können, den naturwissenschaftlichen Unterricht an den Realanstalten in gleichem Maße wie den mathematischen Unterricht zu steigern [man vergleiche Seite 144 f.].

humanistische Gymnasien sind. Hier ist eben das Prinzip von 1900 noch keineswegs zur vollen Durchführung gelangt. Ich teilte Ihnen früher schon [Seite 20] eine Statistik über die Verteilung der höheren Schulen auf die verschiedenen Anstaltsarten mit. Ich will die Zahlen für die Vollanstalten hier noch einmal wiederholen und die Angaben für die vorhergehenden Jahre*) hinzufügen; das ergibt folgende Tabelle:

Anzahl der	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906
Gymnasien	291	295	303	315	324	324	327
Realgymnasien	77	76	80	87	93	100	103
Oberrealschulen	35	37	40	42	47	50	55
Gesamtzahl	403	408	423	444	464	474	485

Lassen Sie mich diese Angaben auch noch in Prozente der Gesamtzahlen umgerechnet mitteilen:

Prozentzahl	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906
Gymnasien	72,2	72,3	71,6	70,9	69,8	68,4	67,4
Realgymnasien	19,1	18,6	18,9	19,6	20,0	21,1	21,2
Oberrealschulen	8,7	9,1	9,5	9,5	10,1	10,5	11,3

Sie sehen, meine Herren, die relative Anzahl der Gymnasien hat in den letzten Jahren langsam abgenommen, aber auch nur sehr langsam. Die humanistischen Anstalten allein machen immer noch mehr als zwei Drittel aller neunklassigen höheren Schulen aus. Dadurch behält nun die Bildung auf altsprachlicher Basis fortgesetzt ein Übergewicht, das ihr in unserer Zeit schwerlich noch zukommt. Die beklagenswerte Folge ist, daß eine breitere naturwissenschaftliche Bildung weitaus der Mehrzahl unserer höheren Schüler nicht zuteil werden kann! Denn offenbar wären am Gymnasium, wie es heute ist, die verlangten sieben Stunden für einen voll ausreichenden naturwissenschaftlichen Unterricht gar nicht zu gewinnen.

Überdies finden wir die Realanstalten fast sämtlich in größeren Städten situiert, wo gleichzeitig auch Gymnasien vorhanden sind;

*) Wieder nach den [Seite 19 zitierten] Statistischen Mitteilungen über das höhere Unterrichtswesen im Königreiche Preußen.

ich nenne aus dem Osten der Monarchie: Danzig, Elbing, Graudenz, Tilsit, Königsberg, Posen, Bromberg, Breslau, und einige aus dem Westen: Köln, Düsseldorf, Krefeld, Düren, Aachen, Koblenz, Barmen, Elberfeld usw. Diese Tatsache bedeutet, meine Herren — wenigstens in dem größeren Teil unseres Vaterlandes, wo die Industrie nicht die unbedingte Führung hat, z. B. im ganzen Osten unserer Monarchie — eine abermalige Verstärkung des Übergewichts der Gymnasien. Auf dem Lande und in den kleinen Städten bleibt den Eltern in der Mehrzahl der Fälle keine Wahl, auf welche Art höherer Schulen sie ihren Sohn schicken sollen. In jenen größeren Städten aber genießen noch heute, vornehmlich infolge traditioneller Vorurteile, die Realanstalten ein geringeres Ansehen als die Gymnasien: daher werden denn die Knaben aus den besseren Ständen mit Bevorzugung in die humanistischen Anstalten geschickt, und wenngleich die Realschüler vorwiegend aus Kreisen stammen, denen eine höhere Bewertung tüchtiger eigner Arbeit nahe liegt, so stellen doch die Kinder aus den höheren Ständen im großen und ganzen genommen das besser vorgebildete Schülermaterial dar. So kommt es, daß die große Mehrzahl der jungen Männer, die später im öffentlichen Leben leitende Stellen einnehmen werden, unter den herrschenden Verhältnissen immer noch keine ausreichende naturwissenschaftliche Bildung für ein allseitiges Verständnis der Kultur unserer Zeit mitbekommen.

Dies also ist ein Punkt, wo die proklamierte Gleichberechtigung der drei Typen der höheren Schulen in Wirklichkeit bis jetzt nicht zur vollen Geltung gelangt ist. Ich muß noch auf einen weiteren Punkt hinweisen. Die früher erwähnte Einrichtung der Ergänzungskurse an den Hochschulen [Seite 97f.] ist bisher keineswegs in gehöriger Allseitigkeit ausgestaltet worden. Der Gedanke war ja, die Hochschulvorlesungen der verschiedenen Fächer zunächst an die Abiturienten der geeignetsten Vorbildung anzuschließen und für die übrigen jeweils passende Ergänzungskurse einzurichten. Solche Kurse sind nun zurzeit allein den Realisten, niemals auch den Humanisten auferlegt. Daß der Oberrealschüler, der sagen wir Jura studieren will, sich in einem Vorkurs an der Universität nachträglich Latein aneignen muß, das hält jedermann bei uns für billig und recht. Man denkt aber nicht daran, daß etwas Entsprechendes statthaben sollte, wenn ein Gymnasialabiturient z. B. Ingenieur werden will. Es ist tatsächlich so, als ob das Niveau der Reifeprüfung eines Gymnasiums auch heute noch für jede Art spezieller Berufswahl die normale Voraussetzung abgäbe! als ob man die Gymnasialabiturienten um keinen Preis gegen die übrigen zurückstehen lassen wollte! Das ist in der Tat wiederum mit der Gleichwertigkeit der drei höheren Schulen

unvereinbar. Wenn die Oberrealschule ihre Zöglinge in der Mathematik wesentlich weiter zu bringen vermag als die übrigen Anstalten — und wir fordern, daß sie es tut — dann soll ihren Absolventen auch die Teilnahme an gewissen Anfangsvorlesungen oder -kursen erspart werden und dies den gymnasial vorgebildeten aufgehoben bleiben. In gleicher Weise muß man den gesamten Realabsolventen, solange diese wie gegenwärtig erheblich bessere naturwissenschaftliche Kenntnisse mitbringen als die Gymnasiasten, eine entsprechende Erleichterung für den Beginn des naturwissenschaftlichen Studiums gewähren. So verlangt es die Gerechtigkeit, so verlangt es auch die Zweckmäßigkeit.

Das geeignetste Mittel, das hier Abhilfe zu schaffen vermag, ist die starke prozentuale Verminderung der humanistischen Anstalten! Wir fordern eine gerechtere als die heute bestehende Verteilung der sämtlichen höheren Schulen auf die drei Typen: Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule, — eine Verteilung nach Maßgabe der Wichtigkeit, die innerhalb des Rahmens unserer gegenwärtigen Kultur jedem Typus vom Standpunkte des Prinzips der spezifischen Allgemeinbildung zukommt. Indem ich so für den Rücktritt des Gymnasiums von seiner bisherigen prävalierenden Stellung wünsche, möchte ich Sie jedoch bitten, mich nicht als einen einseitigen Freund der Realanstalten anzusehen. Nur solange diese so beiseite geschoben sind wie heute, trete ich in erster Linie für ihre Besserstellung ein, eben weil eine solche durch die Verhältnisse der Zeit dringend gefordert wird. Eine stärkere Minderheit spezifisch humanistischer Anstalten, die sich dann mit einem relativ geringen Maß der Naturwissenschaften begnügen könnten, erscheint mir sogar sehr wünschenswert; denn ich erkenne die weitgehende Bedeutung der dort vertretenen Fächer rückhaltlos an. Ich denke, ich bin in der ganzen Frage, was das Ziel angeht, mit hervorragenden Freunden des Gymnasiums durchaus eines Sinnes.

Gegen den hier geforderten Bruch mit der faktischen Vorherrschaft der Gymnasien wirken nun zahlreiche Hemmungen. Insbesondere muß man wohl dem Beharrungsvermögen des Publikums die Schuld daran geben, daß trotz der geschaffenen Berechtigungen die Oberrealschulen vorläufig nicht solchen Zudrang haben, wie es eigentlich normalen Verhältnissen entspräche. Unter dem alten Vorurteil, daß die Gymnasien die vornehmsten Anstalten seien, schickt man noch vielfach die Knaben ohne Rücksicht auf Anlage und Neigung ebendorthin. Die Schulverwaltung dagegen hat sich der Einsicht nicht verschlossen, daß hier die Notwendigkeit einer durchgreifenden Reform vorliegt. Da ihr die unmittelbare Verwandlung von Gymnasien in Realanstalten vielleicht zunächst untunlich er-

schien, hat sie das Problem in anderer Weise von zwei Seiten her in Angriff genommen. —

Ein erster Weg, eine größere Anzahl von Schülern auf einem mehr realistischen Unterrichtsgange bis zum Abiturium zu führen, wäre dieser: man macht auf den zwei bis drei obersten Klassen des Gymnasiums einen Teil der altsprachlichen und einen Teil der mathematischen Unterrichtsstunden wahlfrei, derart, daß sich der Schüler entweder für den vollen, innerlich gesteigerten mathematischen oder auf der anderen Seite für den entsprechenden altsprachlichen Unterricht entscheidet. Das wäre dann sozusagen eine einheitliche Schule mit mehreren fakultativen Unterrichtsgängen. Neuerdings hat man in der Tat an hoher Stelle die Möglichkeiten solcher Schulorganisationen vielfach erwogen; Sie mögen etwa den Aufsatz „Freude an der Schule" zum Neujahr 1905 von *A. Matthias**) vergleichen. Man zeigt sich im preußischen Ministerium zurzeit durchaus geneigt, Anträgen um Erlaubnis zu praktischen Versuchen in dieser Richtung wohlwollend entgegenzukommen, und es sind auch bereits einige Versuche in die Wege geleitet worden (zuerst am Gymnasium zu Straßburg in Westpreußen, am Realgymnasium zu Elberfeld). Freilich möchte ich noch kein abschließendes Urteil über sie fällen.

Weitergehend als die soeben besprochene Einrichtung wäre der Vorschlag — der vielfach erwogen wurde und den ich doch kurz nennen muß —, daß an all denjenigen Orten, wo allein Gymnasien oder auch nur Gymnasien in der Überzahl vorhanden sind, das Griechische fakultativ gemacht wird! Dies besagt also folgendes. Erinnern Sie sich, daß ich früher von dem sogenannten Ersatzunterricht in den Klassen Untertertia bis Untersekunda der Gymnasien sprach [Seite 22f.], der den Schülern, die mit Untersekunda abzugehen denken, die Möglichkeit bietet, an Stelle des Griechischen ausgiebiger neuere Sprachen und Mathematik zu treiben; dieser fakultative Ersatzunterricht wäre dem neuen Vorschlag zufolge bis Oberprima hin auszudehnen. Wir hätten dann am Gymnasium von Untertertia an aufwärts überhaupt zwei Parallelkurse, zwischen denen der Schüler zu wählen hat — der eine Kurs vom Typus des alten Gymnasiums, der andere von einem Charakter, welcher dem des Realgymnasiums ziemlich nahe kommt. Wir hätten beim letzteren also kein Griechisch und würden von den freiwerdenden sechs Wochenstunden in den Klassen Untertertia bis Oberprima den Hauptteil den Naturwissenschaften übergeben; der Unterschied gegen das Realgymnasium selber bestünde nur in einigen sprachlichen Stunden, die dort dem Latein, hier den neueren Sprachen zugewiesen wären.

---

*) Monatschrift für höhere Schulen **4** (1905), Seite 1—8.

Ich weiß sehr wohl, meine Herren, daß dieser Vorschlag des fakultativen Griechisch besonders denen, die das Griechische für das Beste am Gymnasium halten, schmerzlich ist und daß sich dagegen auch sonst starke Bedenken erheben. Doch damit wir uns wenigstens darüber klar sind, möchte ich hier auch den besonderen Vorteil eines solchen Plans zur Geltung bringen. Mit der Einführung des fakultativen Griechisch an einer größeren Zahl von Gymnasien würde offenbar im ganzen Lande den höheren Schülern die Möglichkeit geboten, nach Wahl sich in der einen oder in der anderen Richtung auszubilden; der Zwang, daß der Schüler in einer Provinzstadt sich nur humanistisch ausbilden kann, fiele weg. Aber der Zwang in entgegengesetzter Richtung würde ebenfalls vermieden; niemandem, der wirklich zur altsprachlichen Ausbildung neigt, wäre das Erlernen des Griechischen unmöglich gemacht. Von den zahlreichen Bedenken, die wie gesagt diesem ganzen Plan entgegenstehen, will ich ebenfalls eines anführen: das ist die finanzielle Schwierigkeit. Nämlich dort, wo man gerade im Interesse der freien Entscheidung des Schülers ein solches gegabeltes Gymnasium besonders wünschen könnte, in den kleineren Provinzstädten, dort ist die Frequenz meistenteils nicht so groß, daß die Einrichtung der nebeneinander laufenden Lehrgänge ohne größeren Kostenaufwand zu ermöglichen wäre. Das ist schließlich eine Schattenseite jedes fakultativen Betriebes.

Als einen zweiten Weg und ein sehr viel radikaleres Verfahren, die Gymnasialfrage zu lösen, können Sie das Experiment der sogenannten „Reformschulen“ ansehen. Die Entstehung dieser Anstalten liegt allerdings schon einige Dezennien zurück, man hat aber ihre Entwicklung besonders in neuerer Zeit mit immer wachsendem Interesse allerseits gefördert. Die Reformschulen erfreuen sich — und zum Teil sicher mit Recht — eines Wohlwollens der Behörde, wie denn auch der früher erwähnte kaiserliche Erlaß von 1900 ausdrücklich eine Weiterführung dieser Versuche auf breiterer Grundlage wünscht. Um so mehr werden wir hernach zusehen müssen, wie es dort mit dem mathematischen Unterricht steht. Vorderhand einiges allgemeine über die Organisation dieser Anstalten.

Die früher erwähnten Bestrebungen der siebziger Jahre auf eine Einheitsschule hin [Seite 88] hatten zu praktischen Versuchen mit einem gemeinschaftlichen Unterbau der verschiedenen Realanstalten geführt; zuerst wurde 1878 in Altona von Direktor *E. Schlee* eine Verbindung von Realgymnasium und Realschule in den Klassen Sexta bis Quarta eingerichtet. Hiernach werden solche Anstalten, die also für Realgymnasium und Realschule bzw. Oberrealschule einen dreiklassigen gemeinsamen Unterbau ohne Latein besitzen und deren lateinischer Unterricht für die realgymnasiale Abteilung erst in Unter-

tertia beginnt, als Reformschulen Altonaer Systems bezeichnet. Es gibt deren gegenwärtig (1906) in Preußen, wenn ich nur die abgeschlossenen Vollanstalten zähle, 4; wenn ich eine in Entwicklung befindliche Vollanstalt einrechne, sind es also 5.

Lebhafter kam die Sache nach der Schulkonferenz von 1890 in Fluß, als in Frankfurt am Main am Goethe-Gymnasium Direktor *K. Reinhardt* einen entsprechenden Versuch mit einem gemeinsamen Unterbau aller drei höheren Schultypen in die Wege leitete. Man kann die Organisation, die man darnach als Frankfurter System bezeichnet, kurz so schildern: „Die drei untersten Klassen sind für die drei Schularten gemeinsam mit Französisch als einzigem fremdsprachlichen Unterricht; der Unterricht im Latein beginnt in den Gymnasial- und Realgymnasialklassen in der Untertertia, und der Lehrplan bleibt für diese beiden Kategorien noch zwei Jahreskurse hindurch gleich. Erst mit der Untersekunda findet die Trennung statt, indem jetzt in den Gymnasialklassen das Griechische, in den Realgymnasialklassen das Englische eintritt“*). Solcher Schulen gibt es gegenwärtig in Preußen, wenn ich nur die abgeschlossenen Vollanstalten zähle, 24; wenn ich die in Entwicklung befindlichen Vollanstalten einrechne, 53. Ohne Zweifel erstaunliche Erfolge! Und zudem sind diese Zahlen beständig im Ansteigen begriffen**).

Die beiden geschilderten Wege, auf denen die Unterrichtsverwaltung anscheinend eine Lösung des Gymnasialproblems anstrebt, sind freilich sehr lang, und es erhebt sich die Frage, ob die Bedürfnisse der Zeit nicht zu rasch fortschreiten, als daß man eine solche allmähliche Umgestaltung ruhig abwarten darf. Nun — weite naturwissenschaftliche Kreise sowie die Ingenieure vertreten die Überzeugung, daß es auf den bisherigen Wegen in der Tat zu langsam geht. Sie fordern daher kurzweg, den ausgiebigen naturwissenschaftlichen Unterricht, so wie wir ihn für die an Zahl zu verstärkenden Realanstalten befürworten, allgemein in das Gymnasium einzuführen. Was in den Berichten unserer Breslauer Kommission als eine Eventualität formuliert ist: „bei den herrschenden Verhältnissen, unter denen die humanistischen Anstalten an Zahl die realistischen in so hohem Maße übertreffen,“ [0]) oder „unter den gegebenen Verhältnissen“ [0]) ist ein ausgedehnterer naturwissenschaftlicher Unterricht

*) Nach *Lexis*' „Unterrichtswesen“, Band II [zitiert Seite 19], Seite 221.

**) Über die Reformanstalten Altonaer und Frankfurter Systems hinausgehend, verficht der „Verein für Schulreform“ das Prinzip eines sechsklassigen gemeinsamen Unterbaues für alle drei höheren Schulen; in dieser Richtung sind indes noch keinerlei praktische Versuche gemacht worden.

[0]) In den [Seite 6 zitierten] Sonderausgaben des Meraner und des Stuttgarter Berichts bezüglich Seite 7 und Seite 4.

am Gymnasium zu verlangen, — das wird von jener Seite schlechtweg ohne ein Wenn gefordert, da man dort an die Erfüllbarkeit der Bedingung nicht glaubt.

Dieser Schritt gegen die bisher prävalierenden Anstalten, meine Herren, ist jedenfalls eine Abweichung vom Prinzip der spezifischen Allgemeinbildung; und ich würde es lebhaft bedauern, wenn dieses Prinzip scheiterte! Denn auf solche Weise würde das humanistische Gymnasium, das ich in einer numerischen Minderheit für unsere Zeit als wertvoll hochschätze, in dem ihm eigentümlichen Charakter Schaden leiden, ja vielleicht zerstört werden. Die Entscheidung ist dann aber eine Machtfrage, und in der Erkenntnis der hier liegenden Gefahr richte ich an die Freunde des humanistischen Gymnasiums den dringenden Appell, mit ganz anderer Entschiedenheit als bisher für die von ihnen selbst als notwendig erkannte Verminderung der Gymnasien einzutreten; denn sonst werden sich die Verhältnisse gegen sie und über sie hinweg durchsetzen!

Auf diesen Ruf, meine Herren, muß sich heute die ganze Bewegung zur Reorganisation des höheren Schulwesens konzentrieren. Und darum habe ich mich hier über den Gegenstand verbreitet, damit Ihnen die Grundlagen bekannt sind, mit denen Sie bei der Umgestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts zu rechnen haben. —

Lassen Sie uns nun kurz noch betrachten, wie der mathematische Unterricht an den Reformschulen Frankfurter Systems eingerichtet ist. Um nicht zu sehr beim allgemeinen zu bleiben, möchte ich hier nur von dem Betrieb an einer besonders hervorragenden Anstalt sprechen; ich meine das soeben genannte Goethe-Gymnasium zu Frankfurt am Main. Dort sind für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht die folgenden Stundenzahlen angesetzt:

Reformgymnasium	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Summe
Mathematik	5	5	5	4	4	3	3	3	3	35
Naturwissenschaften	2	2	3	2	2	2	2	2	2	19

Zum Vergleich füge ich noch einmal die entsprechenden [Seite 100] mitgeteilten Stundenzahlen vom gewöhnlichen Gymnasium hinzu:

Gewöhnliches Gymnasium	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Summe
Mathematik	4	4	4	3	3	4	4	4	4	34
Naturwissenschaften	2	2	2	2	2	2	2	2	2	18

Richtet man hier den Blick zunächst auf die Rubriken „Summe", so möchte man glauben, wir Mathematiker und ebenso die Naturwissenschaftler sollten nur ganz zufrieden sein, da beiden Fächern am Reformgymnasium sogar je eine Stunde mehr eingeräumt ist. Und doch muß ich sagen, die Mathematik zum mindesten kommt nicht eben gut dabei weg. Sie wollen nur beachten, daß auf dem Reformgymnasium der Mathematikunterricht in den Unterklassen verstärkt, auf den Oberklassen dagegen auf drei Wochenstunden herabgemindert wird, daß also — der Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts nach unten hin verschoben erscheint. Dies muß ohne Zweifel als eine Einschränkung der Mathematik aufgefaßt werden, denn es ist klar, daß eine Stunde auf Oberprima mehr Erträgnis hat als eine Sexta- oder Quartastunde.

Bedingt wird jene Verschiebung natürlich durch den Umstand, daß auf den Oberklassen die alten Sprachen einsetzen, und zwar mit einer sehr großen Stundenzahl, da beim Abschluß in Oberprima dasselbe Ziel erreicht werden soll wie auf dem gewöhnlichen Gymnasium. Auch wird natürlich auf die alten Sprachen in den Oberklassen eine besondere Unterrichtsenergie verwandt, damit man das vorgeschriebene Lehrziel womöglich glänzend erreicht. Denn eine Reformschule wie das Goethe-Gymnasium steht mit ihrem Sprachunterricht erklärlicherweise im Mittelpunkt allgemeiner Beobachtung, sodaß Lehrer wie Schüler in angespanntester Tätigkeit sein müssen. Die Mathematiker an den Reformanstalten klagen indes vielfach, daß sie daneben nicht recht zur Geltung kommen.

Unter diesen Gesichtspunkten müssen wir dem Experiment der Reformschulen, so erfreulich es an sich ist, mit einem gewissen Bedenken zusehen, und die Breslauer Unterrichtskommission hat denn auch in diesem Sinne Gelegenheit genommen, in dem Stuttgarter Bericht (Seite 19 bis 34) ihre Stellung zu diesen Anstalten darzulegen. Sie erkennt an, daß ihre eignen Reformbestrebungen mit denen der Reformschulen vielfach im Einklang stehen, fordert aber mit Nachdruck, daß der Bildungswert der Mathematik und ebenso der Naturwissenschaften in gleicher Weise wie an den übrigen höheren Schulen zur Geltung kommen soll.

Aus dem Lehrplan des Goethe-Gymnasiums will ich Sie nur beiläufig noch auf einen interessanten Punkt aufmerksam machen. Für Unterprima wird empfohlen*), als schwierigere planimetrische Konstruktionsaufgabe das Apollonische Problem zu behandeln. Wie Sie wissen, versteht man darunter die Aufgabe, zu drei gegebenen

*) Goethe-Gymnasium: Lehrplan für Rechnen und Mathematik, Frankfurt am Main (Knauer) 1904, Seite 26.

Kreisen k_1, k_2, k_3 einen vierten k zu konstruieren, der jene drei sämtlich berührt [Figur 5]. Dieses Problem kommt, wenn man es analytisch formuliert, auf die Lösung einer speziellen Gleichung achten Grades hinaus, die sich durch Quadratwurzeln lösen läßt. Das Studium, wie sich diese acht Lösungen mittels Quadratwurzeln herstellen lassen und wie dann jeder Lösung eine besondere geometrische Konstruktion mit Lineal und Zirkel entspricht, ist vom mathematischen Standpunkt gewiß ein interessantes Ding, aber ich meine, es wird auf der Schule viel zu viel Zeit damit absorbiert, wenn man es ordentlich machen will. Das Problem scheint mir überhaupt zu entlegen, als daß man es, wie dort beabsichtigt scheint, in den Mittelpunkt des Konstruktionsunterrichts rücken sollte. Hat man vielleicht gemeint, man müsse dem spezifisch-altsprachlichen Charakter der Anstalt in dieser Weise durch eine starke Betonung der antiken Mathematik Rechnung tragen? Aber stellen Sie sich einmal vor, daß man nach demselben Gesichtspunkte die Arithmetik in der bei den Alten vorliegenden Form auf der Schule behandeln wollte, also ohne arabische Ziffern und ohne Buchstabenkalkul, Sie sehen sofort, zu was für Merkwürdigkeiten man so gelangte. Ich fürchte in der Tat sehr, daß man hier in der Herausarbeitung eines spezifischen Zieles doch etwas zu weit geht. —

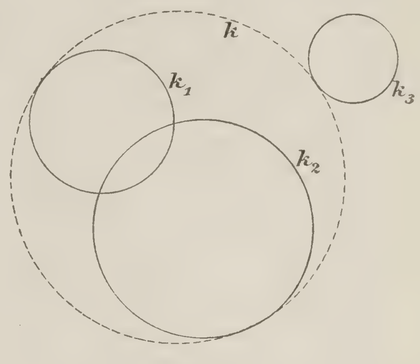


Fig. 5.

Nun, ausführlicher wollte ich auf die Reformschulen nicht eingehen; ich wünschte nur, daß Sie eine Vorstellung mit dem Namen verbänden. Hiermit aber verlassen wir vorderhand die höheren Schulen und wenden uns nun in einem letzten Kapitel dieses Teiles unserer Vorträge zu den Hochschulen.

Siebenter Abschnitt.

Die Hochschulen.

Gemäß der Anlage unserer Vorträge, meine Herren, müssen wir uns mit der Organisation der Hochschulen ohne Zweifel ebenfalls beschäftigen. Ich meine: nicht nur im Hinblick auf die Ausbildung der Lehramtskandidaten, für die wir ja alle interessiert sind; sondern auch soweit Sie, meine Herren, die Laufbahn des akademischen Dozenten ins Auge gefaßt haben, ist Ihnen eine erste Einsicht in die Organisation dieser Anstalten sehr zu wünschen.

Die Betrachtung der deutschen Hochschulen ist freilich ein sehr weitschichtiges Gebiet, fast in noch höherem Maße als die der übrigen Schularten. Da haben wir neben den alten Universitäten, deren Geschichte bei uns in die Mitte des 14. Jahrhunderts zurückreicht, die Bergakademieen, die Kunsthochschulen und die tierärztlichen Hochschulen aus dem 18. Jahrhundert, ferner die landwirtschaftlichen, die militärischen, die forstlichen und die technischen Hochschulen als Produkte des 19. Jahrhunderts. Unser 20. Jahrhundert aber hat damit begonnen, neben anderen Weiterbildungen noch eine neue Hochschulgattung in den Handelshochschulen hinzuzufügen.

Wir würden gewiß alsbald das Ziel aus dem Auge verlieren, wenn wir uns nicht auf einen engeren Kreis beschränken wollten. Ich werde nur von den Universitäten und hernach von den technischen Hochschulen eingehender sprechen. Ohne Zweifel harren auf diesem Gebiete zahlreiche wichtige Aufgaben ihrer Lösung, worauf ich schon früher mit dem Wort „Hochschulprobleme“ hindeuten wollte [Seite 65 und 114]. Es bietet sich hier gegenwärtig die erfreuliche Aussicht, daß die Dinge wohl in lebhafteren Fluß kommen werden, wie sich denn gerade auch unsere Breslauer Unterrichtskommission mit ihnen beschäftigt und über die Ergebnisse ihrer Arbeiten auf der Dresdner Naturforscherversammlung 1907 Bericht erstatten wird. —

Die Universitäten.

Hier möchte ich mich zunächst noch erheblich weiter beschränken; und zwar besonders deshalb, weil Darstellungen des Gegenstandes auf Grund eingehender geschichtlicher Nachforschungen zurzeit noch ausstehen. Lassen Sie mich einmal ganz speziell von dem mathematisch-physikalischen Betrieb an der Universität Göttingen und seiner historischen Entwicklung erzählen. Dies hat für Sie, meine Herren, die Sie nun hier dem Schluß Ihrer Studienzeit entgegengehen, von vornherein denke ich einen gewissen Reiz: zu sehen, aus welchen Verhältnissen heraus die Ihnen vertrauten Einrichtungen, die Sie umgeben, historisch entstanden sind. Aber was ich Ihnen vortragen will, geht auch zum Teil über das örtliche Interesse hinaus, insofern die hier zu verfolgende Entwicklung für die neuere Geschichte der Universitäten überhaupt etwas Typisches darstellt; und zugleich werden Sie dabei manche Fragestellungen von allgemeinerer Wichtigkeit kennen lernen.

Unsere Georgia-Augusta, meine Herren, ist als Landesuniversität des damaligen Kurfürstentums, späteren Königreichs Hannover im Jahre 1737 gegründet worden. Über den ersten Zeitraum ihrer mathematischen Geschichte von 1737 bis 1800 brauche ich mich kaum ausführlicher zu verbreiten. Seine Darstellung ist der Gegenstand der Dissertation von *Conrad H. Müller* *), die ich Ihnen zur Lektüre warm empfehlen kann. Sie vermögen sich daraus ein gutes Bild von den Verhältnissen jener Zeit zu machen, sowie von den interessanten Persönlichkeiten, die damals hier in Göttingen wirkten. Die Hauptfigur ist in der Mathematik der schon einmal [Seite 78] erwähnte *A. G. Kästner* (1719 bis 1800) — „Kästner der Einzige“, wie er auf einer Büste in unserem Bibliotheksgebäude bezeichnet ist. Er war in Göttingen von 1755 bis zu seinem Tode 1800 Professor der Mathematik und Naturlehre, daneben auch als Epigrammatist literarisch tätig.

Um nur einen Augenblick bei dem Göttinger mathematischen Leben im 18. Jahrhundert zu verweilen, will ich Sie erinnern [man vergleiche Seite 75], daß es damals noch keine Lehramtskandidaten gab und daß die vierte Fakultät die Artistenfakultät war, die auf die drei „höheren“ Fakultäten nur vorbereitete. Dementsprechend war die Zuhörerschaft der mathematischen Dozenten eine ganz andere als heutzutage. Das System der mathematischen Vorlesungen hatte eine ziemliche Ausdehnung; insbesondere trieb man viel angewandte

*) „Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert“, Göttinger Dissertation, Leipzig (Teubner) 1904; abgedruckt im 18. Heft der *Cantor*schen Abhandlungen zur Geschichte . . . [zitiert Seite 91], 1904, Seite 51—143.

Mathematik, wozu „Architektur, Fortifikation, Vermessungswesen" gehörten. Dabei war der Unterricht erheblich mehr enzyklopädisch, als man das in der Gegenwart bei uns kennt, und demgemäß weniger eingehend. Betrachtet man übrigens die Stundenpläne von dazumal, so gewinnt man leicht den Eindruck, daß die Professoren früher viel fleißiger gewesen sind als heute; sie hielten jeder eine Reihe von Kollegien nebeneinander, viele Stunden täglich. Die Erklärung dafür liegt aber eben in dem bezeichneten Charakter der Vorlesungen; die Professoren, vielfach selbst in hohem Maße enzyklopädisch ausgebildet und tätig (wie z. B. *Kästner*), schlossen sich eng an die von ihnen selbst geschriebenen Lehrbücher an und gaben in der Vorlesung mehr nur Erläuterungen zu den Kapiteln, welche die Hörer vorher durchgelesen hatten. Die Meinung, daß eine Vorlesung ein Lehrbuch ersetzen könne und solle (eine Meinung, die ich hier keiner Kritik unterziehen will), ist überhaupt erst im 19. Jahrhundert entstanden. —

Versuchen wir uns nun von der weiteren Entwicklung wenigstens in großen Zügen ein Bild zu machen.

Ich möchte eine zweite Periode der Göttinger Mathematik von 1800, dem Todesjahr *Kästners*, bis zur Besitzergreifung Hannovers durch Preußen 1866 rechnen. Diese Zeit entspricht der dritten Periode, die wir bei der historischen Betrachtung des mathematischen Schulunterrichts abgegrenzt haben. Wir sahen damals schon [Seite 78ff.], in diesen Jahrzehnten vollzog sich an den Universitäten die große Umgestaltung, die zur Emanzipation der philosophischen Fakultät führte; so auch in Göttingen. Im 18. Jahrhundert hatte die hohe Wissenschaft, zumal was Mathematik und Naturwissenschaften anlangt, an den „Akademieen" ihre Stätte gefunden. *Euler, Lagrange, d'Alembert* sind Männer, die in der Hauptzeit ihres Schaffens niemals Vorlesungen gehalten haben; sie lebten an den großen Akademieen gänzlich ihrer eigenen Forschung und der Bearbeitung ihrer Werke. Erst mit der Jahrhundertwende tritt die Verbindung der Forschung mit dem Lehramt in der philosophischen Fakultät zutage, und zwar zu Göttingen in einer Form, die nun für die hier betrachtete Periode von 1800 bis 1866 charakteristisch ist.

Wir haben dort nämlich — um die äußeren Einzelheiten vorwegzunehmen — seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts zwei Reihen von mathematischen Professoren, die getrennt nebeneinander stehen: einerseits *Gauß-Dirichlet-Riemann*, die Vertreter der hohen Wissenschaft und der vorwärts schreitenden Forschung, andererseits *Thibaut-Ulrich-Stern*, die Vertreter der eigentlichen Lehrtätigkeit für das Gros der Studierenden. *C. F. Gauß* (geboren 1777) wurde 1807

Professor der Astronomie in Göttingen und blieb als solcher bis zu seinem Tode 1855. Darauf wurde die *Gauß*sche Professur in eine mathematische umgewandelt; der erste, der sie bekleidete, war *P. G. Lejeune-Dirichlet* (geboren 1805, Dozent 1827), nämlich von 1856 bis zu seinem Tode 1859. Sein Nachfolger wurde 1860 *B. Riemann* (geb. 1826, Dozent 1854) und lehrte in dieser Stelle bis zu seinem so früh erfolgten Tode 1866. Auf der andern Seite übernahm 1802 die *Kästner*sche Professur *B. F. Thibaut* (geb. 1775, Dozent 1797, gest. 1832), als Mathematiker Ihnen kaum bekannt, aber einer der glänzendsten Dozenten, die Göttingen besessen hat. 1831 folgte ihm *J. Ulrich* (geb. 1798, Dozent 1817, gest. 1879), der diese Stelle über unsere Periode hinaus inne gehabt hat. Daneben trat 1849 als Extraordinarius, 1859 als Ordinarius der auch als Forscher beachtenswerte *M. Stern* (geb. 1807, Dozent 1829, gest. 1894).

Um das Bild zu vervollständigen, will ich auch noch der Professuren in den Nachbarfächern von den dreißiger Jahren ab gedenken. Vor allem muß ich Ihnen da *Wilhelm Weber* (geb. 1804, Dozent 1827, gest. 1891) nennen, der von 1831 bis 1837 und von 1849 bis 1881 als Professor der Physik in Göttingen wirkte. Infolge der politischen Katastrophe von 1837, die unter dem Namen der „Vertreibung der Göttinger Sieben" bekannt ist, ging *W. Weber* nach Leipzig; inzwischen wurde *B. Listing* (geb. 1808, gest. 1882) 1839 zum Extraordinarius für Physik ernannt und, als man *W. Weber* 1849 wieder berief, wurde *Listing* ebenfalls zum Ordinarius erhoben, sodaß Göttingen nun zwei physikalische Professuren hatte. Was endlich die Astronomie angeht, so war nach *Gauß'* Tode 1855 zunächst kein Ordinariat für sie vorhanden. *W. Klinkerfues* (geb. 1827, gest. 1884) wurde Observator an der Sternwarte 1856, Extraordinarius 1863, ist aber nie Ordinarius gewesen. 1860 wurde dann *E. Schering* (geb. 1833, gest. 1897) außerordentlicher und 1868 ordentlicher Professor für Mathematik und theoretische Astronomie, eine Stelle, mit der die Herausgabe von *Gauß'* Werken verknüpft wurde.

Vom Standpunkt unserer Vorlesung interessiert uns vornehmlich die Professorenreihe Thibaut-Ulrich-Stern. *Thibaut* gab zunächst, in derselben Weise wie *Kästner* vor ihm, den allgemeinen mathematischen Unterricht, an dem die Studierenden aller Fakultäten teilnehmen mußten. Aber zu seiner Zeit bereitete sich allmählich die Umgestaltung vor, an deren Herbeiführung *Thibaut* in seinem Kreise jedenfalls mitgewirkt hat, und welche an die Organisation des höheren Unterrichtswesens in Preußen zu Beginn des 19. Jahrhunderts anknüpft. Ich erinnere Sie daran, daß dort 1810 die Prüfung für Lehramtskandidaten, 1812 ein strenger geregeltes Abiturientenexamen eingeführt worden war und daß von da an die philosophische Fakultät

mit der Lehrerbildung eine neue Aufgabe erhielt. Hannover folgte mit diesen Neuordnungen nach. 1829 wurde das Abiturientenexamen festgelegt, 1831 in Göttingen die Kommission für die Prüfung von Lehramtskandidaten gebildet; *Thibaut* war der erste Examinator für Mathematik und die damals (und noch für lange, bis 1879) damit verbundene Physik. Nach seinem schon 1832 erfolgten Tode trat *Ulrich* in die Prüfungskommission, wo er viele Jahre als einziger Examinator unseres Faches wirkte. Dadurch verband sich von selbst mit dieser Professur die mathematische Lehrtätigkeit für die Menge der Lehramtskandidaten. Hiermit und mit der Lehramtsprüfung haben dagegen *Gauß*, *Dirichlet* und *Riemann* nie etwas zu tun gehabt.

Gleichzeitig mit diesen Verschiebungen trat übrigens an den Universitäten mehr und mehr die angewandte Mathematik in den Hintergrund. Was in den drei übrigen Fakultäten etwas Unerhörtes wäre, und was dort auch niemals geschehen ist, geschah in der philosophischen Fakultät: sie vereinseitigte sich auf die reine Wissenschaft hin und ließ die Anwendungen mit bewußter Absicht verkümmern. Das war die Folge der Hegemonie des Neuhumanismus an den Universitäten zur Zeit, wo das technische Unterrichtswesen an anderen Anstalten in Deutschland aufblühte. Für Göttingen kommt insbesondere die Gründung der „höheren Gewerbeschule" zu Hannover 1831 in Betracht, der Anstalt, die sich später zu der heutigen technischen Hochschule daselbst entwickelte. Immerhin blieb zu jener Zeit von der angewandten Mathematik für die Lehramtskandidaten in Göttingen die Geodäsie und die Astronomie übrig, die von *Ulrich* und von *Klinkerfues* in Vorlesungen und Übungen gepflegt wurden.

Ein besonders bemerkenswertes Ereignis gegen Ende unserer Epoche ist die Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars im Jahre 1850 mit den Direktoren *Ulrich*, *W. Weber*, *Listing* und *Stern*. Es wurde als einheitliches Institut eingerichtet, das eine durchgreifende Ausbildung der Lehramtskandidaten in Mathematik und Physik durch geeignete vielseitige Übungen und zugleich eine Hebung des wissenschaftlichen Studiums bezweckte. Wer in das Seminar eintrat, mußte an allen Übungen teilnehmen, die geboten wurden. Erst später löste sich das Institut in lauter getrennte Spezialeinrichtungen auf, und die einzelnen Seminare wurden dann mehr und mehr zu Pflanzstätten wissenschaftlicher Forschung gestaltet. 1886 bestand noch die Pflicht, daß die Eintretenden sich allen Direktoren des Seminars — es waren damals *Riecke*, *Schering*, *Schwarz*, *Voigt* und ich — zu Beginn des Semesters vorstellen mußten, heute ist auch dieses äußerliche Zeichen der Einheitlichkeit längst verschwunden.

Was nun die andere Linie betrifft, die wir als die Reihe Gauß-

Dirichlet-Riemann bezeichneten, so muß ich vor allem darauf hinweisen, daß *Gauß* überhaupt wenig Vorlesungen gehalten und immer nur eine kleine Schar Zuhörer gehabt hat. Seine Vorlesungen handelten keineswegs, wie man glauben möchte, von der hohen Mathematik, sondern hauptsächlich von Astronomie und Geodäsie — und waren vorwiegend elementar. Daneben bildeten gründliche Übungen im numerischen Rechnen den Mittelpunkt seines Spezialunterrichts. Man vergleiche etwa, wie *R. Dedekind* in dem Jubiläumsbande zur 150jährigen Feier der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften eine Vorlesung von *Gauß* aus seiner eigenen Erinnerung charakterisiert*).

Ein verändertes Aussehen gewannen diese Verhältnisse, als *Dirichlet* 1856 nach Göttingen kam. Dieser hatte lange Jahre vorher, von 1831 bis 1856, in Berlin gewirkt und dort, wie ich schon erwähnte [Seite 82], ziemlich zur gleichen Zeit wie *C. G. J. Jacobi* in Königsberg, den Typus der höheren mathematischen Vorlesungen, wie man sie auch heute hält, eingerichtet. Dies übertrug *Dirichlet* nun nach Göttingen. Von den Vorlesungen, die er zu halten pflegte, will ich besonders die folgenden nennen: Zahlentheorie; Kräfte, welche nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirken (Potentialtheorie); bestimmte Integrale. Die aus ihnen entstandenen Werke sind in den Bearbeitungen bzw. von *R. Dedekind*, *G. F. Meyer*, *G. Ahrendt* und *F. Grube* noch heute als Lehrbücher gebraucht**). Man darf indes nicht denken, daß *Dirichlet* damals viele Zuhörer gehabt habe. Die mündliche Überlieferung erzählt, er habe zunächst vor einem Parterr von Königen geredet; es waren die Dozenten der Universität!

Die von *Dirichlet* eingeschlagene Richtung wurde von *Riemann* fortgesetzt. Dieser hatte zunächst hohe Spezialvorlesungen wie Abelsche Funktionen, lineare Differentialgleichungen gelesen, und es war viel, wenn er da zwei bis drei Hörer hatte, die ihn verstanden. Als ordentlicher Professor setzte er dann aber auch die von *Dirichlet* geschaffenen Vorlesungen über mathematische Physik fort, die

*) Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, Berlin (Weidmann) 1901.

) **a) *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben und mit Zusätzen von *R. Dedekind*, 4. Auflage, Braunschweig (Vieweg) 1894. **b)** *G. Ferdinand Meyer*, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, mit Berücksichtigung der von *Dirichlet* gehaltenen Vorträge, Leipzig (Teubner) 1871. **c)** *G. Lejeune-Dirichlets* Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von *G. Ahrendt*, Braunschweig (Vieweg) 1904. **d)** *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, herausgegeben von *F. Grube*, Leipzig (Teubner) 1876.

wir zu dieser Zeit schon mehr als Kursusvorlesungen — wie wir heute sagen — bezeichnen müssen. Diese Vorlesungen sind später von *K. Hattendorff* in Gestalt von Lehrbüchern herausgegeben worden: Schwere, Elektricität und Magnetismus*) und: Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf physikalische Fragen**). Die 1900 erschienene Bearbeitung der partiellen Differentialgleichungen von *Heinrich Weber*[0]) ist indessen als ein neues Werk aufzufassen, sie soll keineswegs als historische Quelle für den *Riemann*schen Lehrbetrieb gelten. —

Kommen wir jetzt zu dem dritten Zeitabschnitt, der von 1866 bis zur Neuzeit reichen sollte, so beginne ich wieder mit der Angabe der Professorenliste. [Man vergleiche die schematische Darstellung auf folgender Seite]. Die *Riemann*sche Professur wurde erst 1868 wiederbesetzt und zwar durch *A. Clebsch* (geb. 1833, Dozent 1858), der sie bis zu seinem unerwartet frühen Tode 1872 inne hatte. Alsdann folgten auf diesem Lehrstuhl nacheinander: *L. Fuchs* (geb. 1833, Dozent 1865, gest. 1902) 1874 bis 1875, *H. A. Schwarz* 1875 bis 1892, *Heinrich Weber* 1892 bis 1895 und endlich *D. Hilbert* seit 1895. Ein junger Seitensproß neben *Hilbert*s Professur ist das 1902 errichtete Ordinariat für *H. Minkowski*. — Andererseits haben wir aus der vorigen Epoche her *Ulrich*s Professur, die mit dessen Tode 1879 erlosch. *Stern* bekleidete sein Ordinariat bis 1885, wo er sich zurückzog, und in demselben Jahre starb *A. Enneper* (geb. 1830, Dozent 1859), für den seit 1870 ein Extraordinariat eingerichtet worden war. An ihre Stelle wurde ich 1886 berufen. 1892 wurde darauf von neuem ein Extraordinariat abgespalten und zwar speziell mit Lehrauftrag für darstellende Geometrie. Hierin haben wir *A. Schoenflies* von 1892 bis 1899 gehabt, dann *F. Schilling* von 1899 bis 1904, bis nunmehr auch diese Stelle sich zum Ordinariat „für angewandte Mathematik" mit *C. Runge* entwickelt hat.

Die Astronomie war zu Beginn des betrachteten Zeitabschnitts nach theoretischer Seite durch den Professor *E. Schering* und übrigens den Observator *Klinkerfues* vertreten. *Schering* war Ordinarius von 1868 bis zu seinem Tode 1897, er las vorwiegend reine Mathematik; darauf wurde dieser Lehrstuhl in zwei Extraordinariate geteilt: *M. Brendel* wurde Professor für theoretische Astronomie und mit der ferneren Herausgabe von *Gauß*' Werken beauftragt, *E. Wiechert* wurde

*) Mit dem Zusatz: nach den Vorlesungen von *Bernhard Riemann* bearbeitet von *K. Hattendorff*, 2. Ausgabe, Hannover (Rümpler) 1880.

**) Vorlesungen von *Bernhard Riemann*, für den Druck bearbeitet und herausgegeben von *K. Hattendorff*, Braunschweig (Vieweg) 1869.

[0]) *H. Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2 Bände, Braunschweig (Vieweg) 1900.

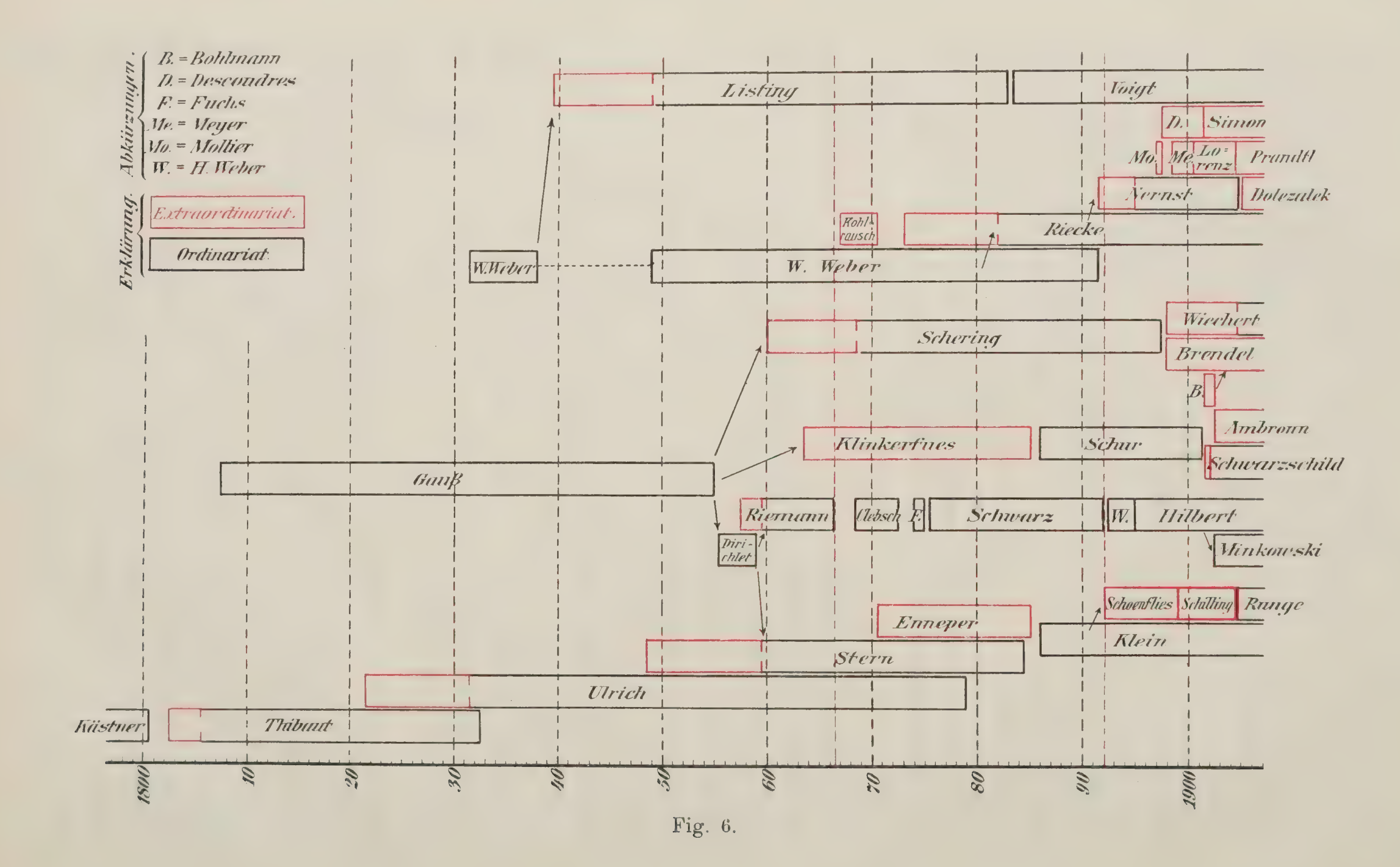

Abkürzungen.
B. = Bohlmann
D. = Descoudres
F. = Fuchs
Me. = Meyer
Mo. = Mollier
W. = H. Weber
Erklärung.
Extraordinariat.
Ordinariat.
Listing
Voigt
D.
Simon
Mo.
Me.
Lorenz
Prandtl
Nernst
Dolezalek
Kohlrausch
Riecke
W.Weber
W. Weber
Wiechert
Schering
Brendel
B.
Ambronn
Klinkerfues
Schur
Schwarzschild
Gauß
Riemann
Clebsch
F.
Schwarz
W.
Hilbert
Dirichlet
Minkowski
Schoenflies
Schilling
Runge
Enneper
Klein
Stern
Ulrich
Kästner
Thibaut
1800
10
20
30
40
50
60
70
80
90
1900

Fig. 6.

Professor für Geophysik, und zwar seit 1905 Ordinarius. Die Stelle von *Klinkerfues* wurde nach dessen Tode (1884) zum Ordinariat erhoben; der erste Ordinarius war *W. Schur* (geb. 1846) von 1886 bis zu seinem Tode 1901. Alsdann wurde *K. Schwarzschild* als Ordinarius berufen (1901) und gleichzeitig der Observator *L. Ambronn* zum Extraordinarius ernannt.

Ebenfalls 1901 wurde das Extraordinat für *G. Bohlmann* an dem 1895 gegründeten Seminar für Versicherungsmathematik eingerichtet. Als *Bohlmann* dann 1902 von der Universität in eine praktische Lebensstellung übertrat, übernahm *Brendel* diesen Lehrauftrag mit.

Die Physik hatte, wie wir sahen, seit der Wiederberufung *W. Webers* zwei Ordinariate. Daneben war ein Extraordinariat von 1867 bis 1870 mit *F. Kohlrausch*, dann seit 1873 mit *E. Riecke* bebesetzt. An *Listings* Stelle kam nach seinem 1883 erfolgten Tode *W. Voigt* nach Göttingen, der speziell die mathematische Physik übernahm. Ordinarius für Experimentalphysik wurde 1881, als *W. Weber* zurücktrat, *Riecke*. Von der letzteren Professur haben sich schließlich seit einem Jahrzehnt noch drei Professuren abgespalten, und zwar: 1891 ein Extraordinariat für physikalische Chemie, zunächst mit *W. Nernst* besetzt (der 1895 auch Ordinarius wurde) und nun seit 1905 mit *F. Dolezalek*; 1897 das Extraordinariat für technische Physik, das in rascher Folge von den Professoren *R. Mollier* 1897, *Eugen Meyer* 1897 bis 1900, *H. Lorenz* 1900 bis 1904 und *L. Prandtl* seit 1904 besetzt wurde; endlich 1897 das Extraordinariat für angewandte Elektrizität mit *Th. Des Coudres* 1897 bis 1901 und *H. Th. Simon* seit 1901. —

Bezeichnend für die Entwicklung des Universitätsunterrichts in unserer dritten Epoche ist das Zusammenwirken zweier Prozesse: der eine folgt dem Bestreben, den abstrakt wissenschaftlichen Betrieb weiter zu steigern, der andere ist in der Entfaltung des modernen Lebens, insbesondere nach seiten der Industrie, in dem neugegründeten Deutschen Reiche gegeben. Wir haben die Verhältnisse ja bei der geschichtlichen Betrachtung des höheren Schulunterrichts [Seite 86f.] schon berührt und haben gesehen, wie damals, von 1870 ab, die Realschulfrage oder vielmehr überhaupt die Frage der Schulreform in lebhaftere Bewegung kam. Uns interessiert an dieser Stelle vornehmlich die von Beginn unseres Zeitraums fortschreitende Einrichtung einer großen Zahl neuer Schulen und die Zulassung der Realgymnasialabiturienten zum Studium der Mathematik und Naturwissenschaften (1870).

Von da aus ergab sich jetzt in unseren Fächern eine starke Zunahme der Frequenz an den Universitäten; ich möchte diese inter-

essante Funktion der Zeit, nachdem wir die Wichtigkeit der graphischen Darstellungen früher so betont haben, hier gern einmal zeichnen. Lassen Sie uns als Abszisse die Zeit nehmen [Figur 7], als Ordinate die Anzahl der Mathematik- und Naturwissenschaftenstudierenden zusammen*) (und zwar das arithmetische Mittel von Sommer- und Winterfrequenz). Beachten Sie das starke Wachsen der schwarzen Kurve in den siebziger Jahren, das Maximum bei 1880, das rapide Abnehmen bis in die ersten neunziger Jahre hinein; und endlich seitdem haben wir wieder ein steiles Ansteigen — und zwar weit über die Höhe des früheren Maximums hinaus. Es ist nicht abzusehen, wie lange es so weitergehen mag. In Bälde muß jedenfalls wieder eine starke Abnahme der Frequenz eintreten. Es wird Sie interessieren, auch die Frequenz in den genannten Fächern nach Abzug der Reichsausländer zu verfolgen; das gibt in der Figur die rote Kurve, die Sie wesentlich in demselben Sinne verlaufen sehen. Vielleicht weist sie schon ein wenig deutlicher auf die für die nächsten Jahre bevorstehende Abnahme des Funktionswertes hin.

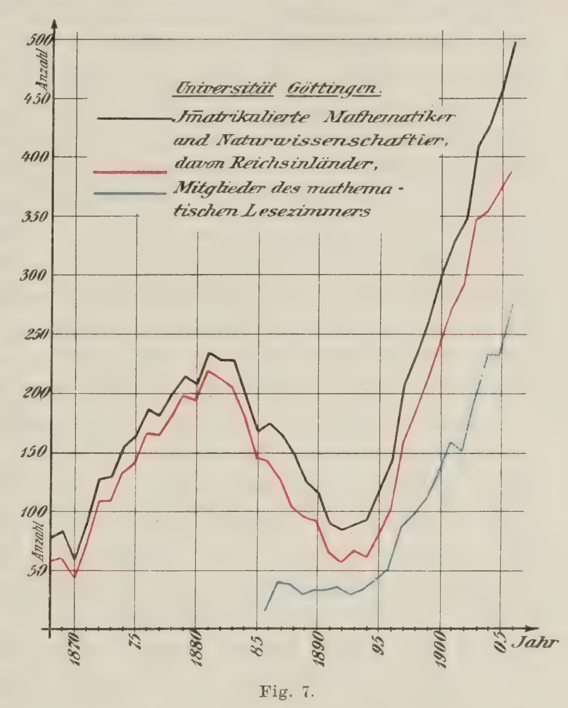


Fig. 7.

In solcher Weise, meine Herren, zeigt die Menge der Studierenden unserer Fächer im Laufe der Zeit ein fortgesetztes An- und Abschwellen, und das geschieht, je nachdem die Aussichten des Berufs günstig oder weniger günstig sind. Bei dieser bedauerlichen Erscheinung, die sich übrigens in allen Studienfächern ebenso

*) Die Zahlen sind aus den statistischen Übersichten der halbjährlich erscheinenden Personalverzeichnisse der Universität ausgezogen. Da die Mathematiker dort leider nicht von den Naturwissenschaftlern gesondert, auch die Berufschemiker von den Mathematikern und übrigen Naturwissenschaftlern erst seit einigen Jahren getrennt angegeben werden, so waren hier nur die Gesamtzahlen zu benutzen.

findet, ist besonders das beachtenswert, was ich die Hysteresis im Urteil des großen Publikums nennen möchte. Die Frequenz nimmt jedesmal noch weiter zu, wenn für die Studierenden in Wirklichkeit die guten Aussichten vorüber sind, und nimmt noch immer ab, wenn sie schon wieder die besten scheinen. Man vergißt eben in der Regel die sechs oder sieben Jahre in Rechnung zu ziehen, die von Beginn des Studiums bis zur Anstellung der Kandidaten mindestens vergehen. Alle Veröffentlichungen von Statistiken und Hinweise auf die bedenklichen Aussichten unserer Lehramtskandidaten in den kommenden Jahren haben bislang das jetzige rapide Steigen der Frequenz nicht aufzuhalten vermocht. Freilich für Sie, die Sie gegenwärtig dem Ende Ihres Studiums entgegengehen, dürfte infolge der Öffnung mancher neuer Wege noch keine allzugroße Sorge bestehen. Ich denke an die Lehrstellen der deutschen höheren Schulen im Ausland, der Mädchenlyzeen, der Fachschulen, der Hochschulen usw.; im einzelnen ist da der Bedarf allerdings schwer zu übersehen.

Aber kehren wir zurück! Mit der Zunahme der Frequenz in den siebziger Jahren überlagerte sich nun wie gesagt die nicht nachlassende Steigerung des spezifisch wissenschaftlichen Betriebes, und damit ergaben sich eigenartige Verschiebungen, die ich früher ebenfalls schon flüchtig streifte [Seite 89 f.]. In die hohen Spezialvorlesungen, die ursprünglich nur für einen engen Kreis von Hörern berechnet waren, drängte die große Menge der Lehramtskandidaten hinein, von denen die preußische Prüfungsordnung von 1866 eigenes wissenschaftliches Arbeiten verlangte. Zudem trat *Ulrich* 1869 aus der Prüfungskommission aus, und nun wurden Examinatoren für Mathematik und Physik zusammen in raschem Wechsel *Schering* 1869 bis 70, *Clebsch* 1870 bis 72, *Stern* 1872 bis 75, dann wieder *Schering* 1875 bis 77, darauf *H. A. Schwarz* usw. Von 1879 an wurde Mathematik und Physik von verschiedenen Examinatoren geprüft; *Riecke* war als erster Physiker in der Kommission.

Ich weiß noch aus eigner Erinnerung, wie bestürzt *Clebsch* darüber war, als sich in seinem Spezialkolleg über Invariantentheorie auf einmal siebzig Hörer einfanden. Aber die Entwicklung ging weiter auf der Bahn der spezialistischen Ausbildung der Lehramtskandidaten. Bei *Clebsch* wurden hauptsächlich Invariantentheorie und projektive Geometrie getrieben, bei *H. A. Schwarz* lernte jeder Studierende Weierstraßsche Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Überall wurde auf einem engumgrenzten Gebiete mit lebhaftester Energie gearbeitet. Aber es waren natürlich nur einzelne Disziplinen, in denen der Kandidat ausgebildet werden konnte. Die mathematische Physik nahm eine besondere Entwicklung; Astronomie und Geodäsie wurden vernachlässigt. Die angewandte Mathematik im

engeren Sinne geriet ganz in Vergessenheit. Es herrschte im Universitätsbetrieb, ohne daß man sich dieser Einseitigkeit vielleicht bewußt war, die Theorie der formalen Bildung: es galt im Grunde als einerlei, welchen mathematischen Stoff sich der Kandidat aneignete, wenn er nur schwierige mathematische Gegenstände zu bewältigen lernte. Man meinte, er werde dann die Kraft haben, sich später selbständig in seinem Beruf zurechtzufinden.

Im einzelnen wurde dabei der akademische Unterricht in mannigfacher Weise gehoben. So sind auf dem Boden jener Zeit verschiedene neue Einrichtungen erwachsen, die ich hier im Zusammenhang anführen muß. Das ist zunächst die Gründung der Bibliothek des mathematisch-physikalischen Seminars und die Einrichtung einer mathematischen Modellsammlung, beides durch *H. A. Schwarz.* Eine „Modell- und Maschinenkammer“ hatte zwar von Anbeginn an unserer Universität bestanden, die im 18. Jahrhundert sogar eine große Rolle spielte; aber diese Sammlung enthielt hauptsächlich technische Modelle und später auch geodätische Geräte. Erst unter *H. A. Schwarz* wurde 1880 eine moderne „Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle“ angelegt, die noch heute, bedeutend erweitert, denselben Namen trägt. Endlich 1886 die Einrichtung des „mathematischen Lesezimmers“*) durch mich, eines ebensolchen Instituts, wie ich es 1880 zu Leipzig in Anlehnung an das Vorbild philologischer Arbeitszimmer begründet hatte. 1892 ging dann die genannte Seminarbibliothek in dem Bücherbestand dieses Lesezimmers mit auf. —

Mit dem Jahre 1892 möchte ich in der hier betrachteten Periode einen Einschnitt machen, der sich auch auf dem Schema Seite 165 deutlich markiert. Von 1892 an tritt nämlich bei uns in Göttingen gegen den vorhin geschilderten Betrieb eine umfassende Reaktion hervor. Die allgemeine Stimmung drängte darauf hin; als ein Zeichen der Zeit erscheint die 1891 erfolgte Konstituierung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, die sich eine engere Fühlungnahme der mathematischen Kreise Deutschlands zum Ziele setzte und alsbald ihre Tätigkeit mit einer Reihe größerer wissenschaftlicher Referate eröffnete (das erste 1892 über die Invariantentheorie von *W. Franz Meyer***)). Seit dieser Zeit sind wir hier in Göttingen, was Mathematik und Physik angeht, immer mehr auf ein Ziel zugeschritten, das ich als Universalbetrieb bezeichnen möchte. Die Idee ist dabei, daß man nach der einen Seite einen allgemeinen Überblick über die Gesamtausdehnung der Wissenschaft zu ermöglichen wünscht und daneben doch auch den Einzelansprüchen

*) Die Zahl der Mitglieder des mathematischen Lesezimmers in ihrem zeitlichen Verlauf ist in der Figur 7 [Seite 167] durch die blaue Linie dargestellt.

) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **1 (1892), Seite 79 bis 292: Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie.

der verschiedenen Berufe und wissenschaftlichen Richtungen vollauf Rechnung trägt. Lassen Sie mich hier kurz die wesentlichsten Fortschritte in chronologischer Folge anführen.

1892 wurde bei uns der erste mathematisch-naturwissenschaftliche „Ferienkurs“ für Oberlehrer abgehalten — eine Einrichtung, die der Staat von da an zur wissenschaftlichen Fortbildung der schon angestellten Oberlehrer an einzelnen Universitäten getroffen hat. Erwähnen muß ich auch, daß die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften von 1892 an neu organisiert und bald darauf das sogenannte „Akademieenkartell“ gebildet wurde, ein Zusammenschluß der Akademieen Leipzig, München, Wien und Göttingen; derselbe gab hernach die Grundlage zur Herausgabe unserer mathematischen Enzyklopädie ab, die ihrerseits einen charakteristischen Fortschritt in der bezeichneten Richtung bedeutet. 1892 ferner erhielt *Schoenflies* in Göttingen den Lehrauftrag für darstellende Geometrie, womit eine von der Regierung anerkannte angewandte Mathematik abermals ihren Einzug bei uns hielt. 1892 bildete sich mit dem Kommen *H. Weber*s unsere „mathematische Gesellschaft“, wo sich wöchentlich die Dozenten und dazu aufgeforderte ältere Studierende zu Besprechungen und Vorträgen über die neuesten Fortschritte der mathematischen Wissenschaften vereinigen. 1892 wurden auch zum ersten Mal „Studienpläne“ für die Studierenden herausgegeben, welche sich im Lauf der Jahre zu unseren „Ratschlägen und Erläuterungen“ ausgestaltet haben; sie dienen den Studierenden zur Orientierung über die Mannigfaltigkeit der Vorlesungen, damit sie sich das für sie Geeignete selbständig heraussuchen lernen. 1893 war die Weltausstellung und der Kongreß zu Chicago, wo Göttingen mit einer *Gauß-Weber*-Ausstellung figurierte und ich selbst eine Reihe zusammenhängender Vorlesungen über neuere Mathematik hielt*). Im Anschluß daran kam von Amerika und England das Frauenstudium zu uns nach Göttingen. Und zuerst natürlich zur Mathematik und Physik, meine Herren, denn in der Frage der Berechtigungen sind unsere Fächer immer vornean gewesen; wir waren geradezu bei allen grundlegenden Neuorganisationen immer das bevorzugte Versuchsobjekt.

Gehen wir weiter. 1894 erfolgten die ersten Schritte zu der Herausgabe unserer mathematischen Enzyklopädie**), 1895 die Gründung des Instituts für physikalische Chemie mit *Nernst* als Direktor. 1895 fand bei uns die erste Promotion einer Dame in

*) The Evanston Colloquium, lectures on mathematics, New-York (Macmillan) 1894; ins Französische übersetzt von *L. Laugel:* Conférences sur les mathématiques, Paris (Hermann) 1898.

**) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen; in 7 Bänden, heftweise erscheinend, Leipzig (Teubner) seit 1898.

Preußen statt, nämlich des Fräulein *G. Chisholm*, der jetzigen Frau Dr. *Young**). 1895 tagte in Göttingen die Versammlung des „Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts“, des für unsere Gebiete maßgebenden Oberlehrervereins, der hiermit zum ersten Mal Beziehung zu unserer Universität nahm. 1895 die erwähnte Gründung des Versicherungsseminars. 1897 die Einrichtung einer Abteilung für „technische Physik“ (Mechanik, einschließlich Thermodynamik) und bald darauf einer Abteilung für angewandte Elektrizität beim physikalischen Institut; die Mittel dafür brachte zum Teil eine Vereinigung von Großindustriellen auf, die sich 1898 formell konstituierte und die mehrfach als bewegende Kraft in den Erscheinungen anzusehen ist: die sogenannte „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik“. 1898 wurde das geophysikalische Institut von der Sternwarte losgelöst. Von 1898 muß ich auch den Erlaß der neuen preußischen Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten erwähnen, welche die angewandte Mathematik als besonderes Prüfungsfach festlegte. 1898 die Anfänge der Entwicklung, die 1900 zu der langgeplanten großen internationalen Assoziation der Akademieen hingeführt hat; im Zusammenhang damit steht die Herausgabe des „International Catalogue of Scientific Literature“**) in Jahresbänden von 1902 an. 1899 geschah bei uns die Einrichtung eigner mathematischer Zeichensäle und die der neuen geodätischen Sammlung. 1900 der Ferienkurs für Oberlehrer, bei dem die angewandte Mathematik und Physik im Mittelpunkt stand, und im Anschluß daran die Veröffentlichung des [schon Seite 3 zitierten] ersten Ferienkurssammelbandes von *Riecke* und mir: Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen.

Ferner: 1901 wurde das neue geophysikalische Institut auf der Höhe des Hainbergs in Betrieb genommen. 1903 wurde die Abteilung B der mathematischen Sammlung als „Abteilung für graphische Übungen und mathematische Instrumente“ mit *Schilling* als Direktor selbständig, während mir die Abteilung A „für mathematische Modelle“ unterstellt blieb. Neujahr 1904 eine wesentliche Erweiterung unseres mathematischen Lesezimmers. 1905 die Begründung des Instituts für angewandte Mathematik und Mechanik, das nun unter Leitung von *Runge* und *Prandtl* die mathematischen Zeichensäle, die Abteilung B der mathematischen Sammlung

*) Mit der Dissertation: Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie, Göttingen (Dieterich) 1895.

**) Published for the International Council by the Royal Society of London; für Deutschland: Berlin (Paetel).

und die frühere Abteilung des physikalischen Instituts für „technische Physik“ (Mechanik und Thermodynamik) in sich schließt. 1905 das Ingangkommen der Verhandlungen zur Gründung einer Fachschule für Mechaniker in Göttingen; wir planen, daß sich auf einem vierklassigen Unterbau, wie er sich auch an anderen Plätzen findet, noch eine Selekta erheben soll, die in eine gewisse Wechselbeziehung zu unseren Universitätsinstituten tritt. 1905 die Einweihung des großen neuen Gebäudes für das physikalische Hauptinstitut und des ebenfalls neuen Gebäudes des Instituts für angewandte Elektrizität. Im Anschluß an diese Feier wurde von der Göttinger Vereinigung eine Festschrift herausgegeben, die ausführlich die Einrichtung der physikalischen Institute (einschließlich des Instituts für angewandte Mathematik) und ihre Entwicklung darlegt*).

Für 1907 steht, wenn ich schon etwas in die Zukunft vorausgreifen darf, die Veröffentlichung eines Katalogs der Bibliothek unseres mathematischen Lesezimmers in Aussicht. Diese Bibliothek ist prinzipiell Präsenzbibliothek, während unsere allgemeine Universitätsbibliothek, deren mathematische Bestände durch systematische Nachschaffungen in den letzten Jahren immer mehr ergänzt worden sind, ihre Bücher ausleiht.

Andrerseits ist nun seit 1900 das allgemeine Interesse für die Fragen der mathematischen Pädagogik verstärkt in den Vordergrund getreten. Ich führe in dieser Hinsicht den Oberlehrer-Ferienkurs von Ostern 1904 an, dessen Vorträge in dem [schon Seite 5 zitierten] zweiten Sammelbande von *Riecke* und mir enthalten sind. Ferner meine Vorlesungen vom Winter 1904/05 und Sommer 1905, welche die Grundlage für die vorliegende Ausarbeitung von Vorträgen abgegeben haben. Endlich der Ferienkurs von Ostern 1906, der im Kreise der zahlreich teilnehmenden Direktoren und Oberlehrer eine Menge interessanter Debatten über den mathematischen Unterricht mit sich brachte; Sie mögen dazu das [Seite 128 zitierte] Referat von *J. Schröder* vergleichen.

Fragen wir jetzt noch, ob der Student von heute durch die geschilderte Entwicklung der Verhältnisse nun glücklicher geworden ist, so können wir nicht mit einem uneingeschränkten Ja antworten. Aber vielleicht liegt das weniger in den Dingen selbst begründet als in dem mangelhaften Verständnis, mit dem die Studentenschaft zum Teil den neuen Dingen gegenübertritt. Wenn der Student, der neu zu uns kommt, sich vor das so weitverzweigte System unseres mathematisch-naturwissenschaftlichen Betriebes ge-

*) Die physikalischen Institute der Universität Göttingen, Leipzig (Teubner) 1906. Darin am Schluß (Seite 189—200) eine kurze Geschichte der genannten „Göttinger Vereinigung“.

stellt sieht, so entsteht leicht ein Gefühl der Unsicherheit bei ihm. Und er löst die Schwierigkeit in der Regel dahin, daß er nun bloß das Alte studiert und von dem übrigen keine Notiz nimmt. Meine Herren, das ist es, wogegen wir arbeiten müssen. Der Student soll lernen, das Ganze zu überblicken und innerhalb des weiten Rahmens unserer Einrichtungen je nach seinem Streben den für ihn geeigneten Weg zu gehen; er soll — damit stellen wir freilich eine gewisse Anforderung an sein Urteil — selber auswählen nach dem Prinzip der Gleichwertigkeit der verschiedenen Wege und dem Prinzip der Freiheit in der Entscheidung.

Diese Forderung der Auswahl bezieht sich naturgemäß, während die Anfangsvorlesungen ja mehr oder weniger allgemeinverbindlich sein werden, in der Hauptsache auf die mittleren und höheren Semester; denn je weiter der Studierende fortschreitet, je mehr wird billigerweise seine individuelle Freiheit zunehmen. Von der Zahl derjenigen, die auf Grund ihrer Fähigkeiten den Doktorhut zu erwerben gedenken, soll wiederum nur eine starke Minderheit in reiner Mathematik promovieren; und diese werden an den hohen mathematischen Spezialvorlesungen teilnehmen. Die Mehrzahl der Doktoranden dagegen wird bei den verschiedenen Einzelinstituten passenderen Anschluß finden. Der Verbreiterung unseres Betriebes entsprechend sind ja bei uns angewandte Mathematik und Physik zu besonderen Fächern beim Doktorexamen gemacht, während die reine Mathematik sogar in zwei Fächer, Analysis und Geometrie, gespalten ist. All solche Dinge den Studierenden klar vor Augen zu führen, ist die Sache unserer schon [Seite 170] erwähnten „Ratschläge und Erläuterungen". Ich möchte hier nur den Wunsch anschließen, daß die Herren dieses Schriftchen mehr läsen! Sie finden dort in der Tat Antwort auf die verschiedensten Fragen, die Sie betreffs der Einrichtung Ihres Studiengangs stellen mögen. Vor allem scheint mir wichtig, meine Herren, daß der Bann der Tradition der alten Semester gebrochen wird. Die Jugend soll nicht fragen: Wie und was haben die alten Herren studiert? und danach ihren Studiengang einrichten wollen; sondern die Jugend soll sich den neuen Ideen öffnen, soll die neuen Möglichkeiten mit Verständnis, mit Begeisterung erfassen! —

Soweit von der Universität Göttingen. Was nun die Entwicklung an den andern Universitäten betrifft, so haben wir überall der Art nach etwas Ähnliches wie in Göttingen, wenn auch der Betrieb in der Neuzeit anderwärts noch nicht zu so breiter Ausgestaltung gelangt ist wie bei uns. Immerhin können wir in der Universitätsgeschichte des 19. Jahrhunderts, was unsere Fächer angeht, allenthalben drei Perioden unterscheiden: eine Zeit relativ elementaren Unterrichts auf breiter

Basis, wo man Mathematik, Physik, Chemie, Botanik, Zoologie usw. alles nebeneinander studierte; dann eine Zeit des wissenschaftlich gesteigerten, aber gleichzeitig spezialistischen Unterrichts; und endlich eine Zeit, wo wieder allgemeinere Interessen hervortraten, seit etwa anderthalb Jahrzehnten. Auf die Einzelheiten werde ich hier nicht eingehen, zumal der Prozeß in keiner Weise abgeschlossen erscheint. Insbesondere muß es einer späteren Zeit vorbehalten bleiben, die Entwicklung des mathematischen Vorlesungsbetriebs von etwa 1870 an, wo zumeist noch Lebende in Betracht kommen, zu verfolgen.

Nur über die bezeichnende Bewegung um die Mitte des 19. Jahrhunderts, welche die Periode des spezialistischen Unterrichts heraufführte, will ich einige genauere Bemerkungen hinzufügen, umsomehr als ich mich bei früherer Gelegenheit mit einer Andeutung begnügte. Die Bewegung ging von verschiedenen Hauptzentren aus, deren wissenschaftliche Impulse bis heute das Studium der Lehramtskandidaten noch überall beeinflussen.

Das erste solche Zentrum war die Universität Königsberg, wo *C. G. J. Jacobi* (lebte 1804 bis 1851) von 1827 bis 1842 seine große Tätigkeit entfaltete. Aus jenem Betrieb stammt unter anderem das besondere Interesse für die Lehre von den elliptischen Funktionen, um deren Entwicklung sich *Jacobi* in erster Linie verdient gemacht hat, und die Meinung, daß eine Kenntnis der elliptischen Funktionen zum selbstverständlichen Repertoir des Mathematikstudierenden gehöre. Neben *Jacobi* haben damals in Königsberg *F. Neumann* (lebte 1798 bis 1895) mit seinen Vorlesungen über mathematische Physik und *F. W. Bessel* (lebte 1784 bis 1846) als Astronom ihre hervorragende Wirksamkeit ausgeübt. Von hier ist die Aufnahme der mathematischen Physik in den allgemeinen Lehrbetrieb der Universitäten ausgegangen.

Sodann muß ich die erste Berliner Schule nennen. Sie wurde vor allem durch *P. G. Lejeune-Dirichlet* begründet, der an der Universität Berlin von 1831 bis 1855 tätig war; später, 1844 wurde auch *Jacobi* von Königsberg dorthin berufen und wirkte daselbst bis zu seinem Tode 1851. Neben diesen beiden, die hauptsächlich die höhere Analysis und Zahlentheorie zur Geltung brachten, vertrat *J. Steiner* in seiner Lehrtätigkeit von 1835 bis 1864 die Geometrie in charakteristischer Färbung. *Steiner* war der synthetische Geometer par excellence; die „Reinheit" der synthetischen Methode war bei ihm sozusagen auf die Spitze getrieben, der Gebrauch der xy-Koordinaten war direkt verpönt. Diese prinzipielle Einseitigkeit hatte ihre große Wirkung: *Steiner* begründete damit die weitverzweigte Schule der „neueren" synthetischen Geometrie.

An dritter Stelle muß ich noch einmal Göttingen anführen. Ich erinnere Sie an *Dirichlet*, der in seiner Lehrtätigkeit von 1856

bis 1859 den Typus der hohen Spezialvorlesungen bei uns einführte, und an den genialen *Riemann*, der in den Jahren 1860 bis 1866 die Funktionentheorie komplexer Variabeln in der von ihm geschaffenen Behandlungsweise („*Riemann*sche Flächen") zu höchster Entwicklung brachte. Nach ihm gewann die Mathematik in Göttingen ein etwas verändertes Aussehen durch die weitausgreifende Tätigkeit von *Clebsch* 1868 bis 1872, der die *Riemann*schen Ideen mit projektiver Geometrie und Invariantentheorie verschmolz; er hatte in ähnlicher Weise vorher 1863 bis 1868 in Gießen gewirkt (*Clebsch*sche Schule).

Endlich die zweite Berliner Schule, deren große Vertreter *E. E. Kummer* (lebte 1810 bis 1893), *K. Weierstraß* (1815 bis 1897) und *L. Kronecker* (1823 bis 1891) sind; sie wirkten dort bezüglich seit 1856, 1856, 1861. Bei ihnen trat die Idee der streng logischen Beweisführung in den Vordergrund, besonders durch *Weierstraß*, womit ein bedeutender Aufschwung der Funktionentheorie zusammenging. Und andrerseits macht sich, zumal durch *Kronecker*, eine Wendung zum Abstrakten, zur Arithmetisierung intensiv geltend; es ist die Wendung in unserer Wissenschaft, die den Zahlbegriff, insbesondere den Begriff der positiven ganzen Zahl, zum einzigen Fundament machen will und die primäre Bedeutung der Raumvorstellung nach Möglichkeit zurückschiebt. —

Überschauen wir schließlich im ganzen noch einmal die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den Universitäten im 19. Jahrhundert, so tritt zu Beginn dieses Zeitraums als ein hauptsächlich treibendes Moment das Vorbild der neuhumanistisch-philologischen Professoren mit ihrem gesteigerten spezialistischen Unterrichtsbetriebe hervor. Diese waren es ohne Zweifel, denen *Jacobi* folgte, als er seine berühmten Spezialvorlesungen zu Königsberg einrichtete.

Aber daneben dringt allmählich eine zweite Strömung durch; sie hat einen mehr expansiven Charakter, wenn wir den Neuhumanismus als exklusive Bewegung bezeichnen wollen. Es ist das Streben nach dem Vorbild des französischen Unterrichtswesens, das seit der großen Revolution neugeordnet war. Dies läßt sich deutlich zuerst im naturwissenschaftlichen Betriebe der Universitäten erkennen. Als *J. Liebig* (1803 bis 1873), der in Paris studiert hatte, als junger Mann Professor an der Universität Gießen wurde, schuf er dort 1827 sein chemisches Laboratorium, eine Institution, die bis dahin auf deutschem Boden unbekannt war; *Liebig* steht damit an der Spitze unserer heute weit entwickelten Einrichtungen von praktischen Übungen auf allen naturwissenschaftlichen Gebieten. Im mathematischen Universitätsunterricht scheint der hier gekennzeichnete französische Einfluß für die ältere Zeit nur indirekt nachweisbar, nämlich in-

sofern vielfach französische Lehrbücher, denen naturgemäß auch der Stempel der ganzen Organisation aufgeprägt ist, sich einbürgerten.

Nun seit Anfang der neunziger Jahre bereitet sich im Betriebe der Universitäten ganz allmählich eine große moderne Umgestaltung vor, die Sie als Resultante jener beiden Teilströmungen ansehen müssen. Wie das in Göttingen in der Mathematik und Physik vor sich gegangen ist, haben wir uns vorhin klar gemacht. Und die Göttinger Universität dürfte an dieser Stelle entscheidend Bahn gebrochen haben. Eine entsprechende Entwicklung wird an den übrigen Universitäten folgen — ich zweifle nicht — in all den verschiedenen Gebieten, deren Pflege diesen Anstalten von altersher obliegt. Das ist eine mit der Tradition der Universität verträgliche wirklich universelle Vertretung der Wissenschaft und ihres Unterrichts.

Vom Ziel freilich sind wir auch hinsichtlich der Mathematik in Göttingen noch entfernt. Ich vermisse da besonders zwei Dinge: einmal die Vertretung der Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie und auf der andern Seite die Pflege der Geschichte der Mathematik, die ja anderswo, — wie z. B. in Heidelberg bei *Moritz Cantor* — längst Berücksichtigung gefunden hat. Denn die Mathematik an sich hat ja überhaupt ihre guten Beziehungen zu den allgemein philosophischen, und ebenso auch zu den philologisch-historischen Fächern. Überhaupt sind uns reichlich Pläne noch für die Zukunft aufgehoben! —

Jetzt aber, meine Herren, lassen Sie uns zu den technischen Hochschulen übergehen, deren Betrachtung das von den Universitäten Gesagte wesentlich zu ergänzen hat. Ich bemerke vorweg: in der Entwicklung dieser Anstalten wird sich uns die Einwirkung jenes französischen Unterrichtsbetriebes, von dem wir gerade sprachen, noch deutlicher zeigen.

Die technischen Hochschulen.

Von den Einrichtungen an den technischen Hochschulen, meine Herren, sollten eigentlich unsere Lehramtskandidaten besser Bescheid wissen, als es in der Regel der Fall ist. Diese Anstalten sind echte Gebilde unsrer modernen Entwicklung und haben als solche nicht bloß eine hohe allgemeine Bedeutung, sondern sind ohne Zweifel auch berufen, einen mehr und mehr wachsenden Einfluß auf die Verhältnisse unserer höheren Schulen zu gewinnen. Wir gehen wieder historisch vor und wollen versuchen, die Entwicklung dieser Schulen zu skizzieren; wir werden so am besten ihren Sinn verstehen lernen, soweit dies überhaupt durch einen kurzen Bericht möglich ist. —

Den Ausgangspunkt der ganzen Bewegung müssen wir, wie ich schon andeutete, in Frankreich suchen. Es war im Jahre 1794, mitten in der Revolution, wo alles in lebhaftester Gärung war, als unter anderem die große Idee hervortrat, einen populären mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Unterricht für die Masse der Bildungsbedürftigen zu organisieren, mit praktischen Übungen in Laboratorien und Zeichensälen. *Monge* war, was Mathematik angeht, die zentrale Persönlichkeit, aber auch beispielsweise *Lagrange* hat damals seine berühmten Vorlesungen über analytische Funktionen gehalten. In dem noch heute bestehenden „Conservatoire des arts et des métiers“ richtete man eine Sammlung von Apparaten und Maschinen ein, die zur öffentlichen Belehrung und zum freien Studieren bestimmt war. Dazu wurden Vorträge gehalten von populärwissenschaftlichem Charakter, zu denen jedermann Zutritt hatte.

Neben dieser populären Einrichtung entwickelten sich nun gleichzeitig geschlossene Anstalten, die wir im folgenden etwas näher betrachten müssen. Die erste solche Anstalt, die wir hier zu nennen haben und die als Mutteranstalt unserer heutigen technischen Hochschulen gelten muß, ist die „École polytechnique“, die bereits 1794 gegründet wurde. An sie gliederten sich alsbald die schon länger bestehenden höheren Fachschulen „École des mines“ und die „École des ponts et chaussées“ in dem Sinne an, daß die École polytechnique die Vorbedingung für ihren Besuch wurde. Dann kam 1829 die „École centrale des arts et manufactures“ hinzu, als Anstalt für die technische Vorbereitung der in der privaten Industrie erforderlichen Kräfte, während die École polytechnique — wie noch heute — ausschließlich spätere Staatsbeamte, insbesondere Genieoffiziere heranbildete.

Der Betrieb an diesen Anstalten ist von dem unsrer heutigen deutschen technischen Hochschulen im ganzen doch außerordentlich verschieden. Es sind vor allen Dingen Internate, die Studierenden wohnen in der Anstalt. Sodann bestehen sehr strenge Aufnahmeprüfungen, die Zahl der Schüler ist genau festgelegt, und nur Schüler mit den besten Noten werden in die École aufgenommen. Dabei sind die Anforderungen in der Mathematik sehr hoch. Wenn der französische Knabe eine der höheren Schulen, welche sieben Klassen entsprechend unsrer Quinta bis Unterprima besitzen [man vergleiche Seite 40 ff.], absolviert hat, so ist er damit noch nicht für das Aufnahmeexamen dieser Hochschulen reif; er muß vielmehr zuvor noch den einjährigen Kurs der sogenannten „Mathematiques spéciales“ absolvieren. In dieser Klasse, die sich als eine Selekta an die Abteilungen C und D der höheren Schulen anschließt, wird außerordentlich viel Mathematik getrieben; man geht weit in die analytische

Geometrie und die Infinitesimalrechnung hinein. Erst nach Absolvierung dieser Selekta kann man in eine École eintreten, vorausgesetzt, daß man die Aufnahmeprüfung besteht. Und nun geht das so mit den Prüfungen weiter. Fast jede Woche findet in den Anstalten ein Examen aller Schüler statt über das, was sie bis dahin erlernt haben. Es sitzt eine große Schulzucht in diesem Betriebe. Man sagt bei uns gern, die eigene Ideenbildung komme dort in der Regel weniger zur Entwicklung, als bei dem hierzulande üblichen freien Studium. Aber das ist gewiß: es wird auf jene Weise an positiven Kenntnissen und schulmäßigem Können außerordentlich viel gewonnen.

Auch an der École polytechnique hat der Unterricht einen ausgesprochen mathematischen Charakter. Ja diese Anstalt hat, jedenfalls in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, auf die Entwicklung der Mathematik selbst und des mathematischen Unterrichts, wie wir schon andeuteten, weit über die Grenzen Frankreichs hinaus maßgebend eingewirkt. Von dorther stammen fast alle bedeutenden Lehrbücher der damaligen Zeit und zum Teil noch der Gegenwart, sei es, daß sie direkt aus jenem Lehrbetrieb hervorgegangen sind, sei es, daß ihre Autoren doch Schüler der Anstalt waren. Lassen Sie mich eine Auswahl solcher Lehrbücher angeben, die ihnen beiläufig zeigen mag, in wie hohem Maße wir selber noch heute unter der Einwirkung jener Schule stehen.

a) Infinitesimalrechnung.

1. *S. F. Lacroix*, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 3 vol., Paris 1797/1800.
2. *A. Cauchy*, Cours d'Analyse, I. Analyse algébrique, Paris 1821. —, Résumé des leçons . . . sur le calcul infinitésimal I, Paris 1823.
3. *Navier*, Résumé des leçons d'analyse, 2 vol., Paris 1840.
4. *Ch. Sturm*, Cours d'analyse, Paris 1857; 8. édition, Paris 1884.
5. *J. A. Serret*, Cours de calcul différentiel et intégral, 2 vol., Paris 1868.
6. *C. Jordan*, Cours d'analyse, 3 vol., Paris 1882/87; 2. édition, Paris 1893/96.

b) Allgemeine Mechanik.

7. *L. Poinsot*, Eléments de statique, Paris 1804.
8. *S. D. Poisson*, Traité de mécanique, 2 vol., Paris 1811.
9. *J. M. C. Duhamel*, Cours de mécanique 2 vol., Paris 1845/46.

c) Darstellende Geometrie.

10. *C. F. A. Le Roy*, Traité de géométrie descriptive, 2 vol., Paris 1842.
11. *Th. Olivier*, Cours de géométrie descriptive, Paris 1845.

12. *J. R. M. de la Gournerie,* Traité de perspective linéaire, Paris 1859.

d) Höhere Geometrie.

13. *G. Monge (*et *J. N. P. Hachette),* Application de l'analyse à la géométrie, Paris 1807/09.

e) Technische Mechanik.

14. *J. V. Poncelet,* Cours de mécanique appliquée aux machines, Metz 1826.

15. *G. G. Coriolis,* Traité de la mécanique des corps solides . . ., Paris 1829.

16. *C. Navier,* Résumé des leçons de mécanique, Paris 1841.

In dieser Aufzählung fehlt die elementare analytische Geometrie, und zwar aus einem einfachen Grunde: dieses Gebiet wurde und wird an der École polytechnique nicht gelehrt, da es von den Mathématiques spéciales her als bekannt gelten kann. Dies erklärt zugleich, warum die französischen Lehrbücher der analytischen Geometrie (z. B. *C. Briot* et *J. C. Bouquet,* Leçons de géométrie analytique, 16. édition, Paris 1897) im Ausland weniger Verbreitung fanden; sie hatten eben nicht das Prestige jener Anstalt hinter sich.

Im übrigen aber steht alles, was die französische Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts an Bedeutendem geschaffen hat, in innigem Zusammenhang mit der École polytechnique. Man vergleiche nur die Mitarbeiter an den Annales de *Gergonne* und der ersten Serie des *Liouville*schen Journal de mathématiques pures et appliquées. Dem überragenden Einfluß jenes Instituts ist es in erster Linie zuzuschreiben, wenn noch heute in Frankreich das Ideal der allgemeinen Bildung viel stärker von den exakten Wissenschaften und der Technik durchsetzt ist als bei uns.

Ein Umschlag in der Allgemeinbedeutung der École polytechnique trat nach der Mitte des Jahrhunderts ein. Es war die Zeit, wo die rasche Entwicklung der modernen Technik einsetzte. Hier wurden die französischen Anstalten wohl durch ihre bis ins einzelne festgelegte Organisation gehindert, mit dieser Entwicklung gleichen Schritt zu halten. Mit ihrem alten Prinzip der gleichförmigen Vorbildung aller Schüler konnten sie den rapide steigenden Ansprüchen der Technik gegenüber nicht mehr die Führung behalten.

Noch mehr trat in den siebziger Jahren die Bedeutung der École polytechnique als des Zentrums der höheren mathematisch-technischen Ausbildung zurück. Damals, als die französische Armee neuorganisiert und wesentlich vergrößert wurde, begann der Militärdienst die Absolventen jener Anstalt fast völlig zu absorbieren, und so wurde es notwendig, daß die Ausbildung der übrigen Ingenieure sowie auch der Lehrer im wesentlichen an andre Institute überging. Dies

hinderte freilich nicht, daß auch heute noch große Mathematiker aus der École polytechnique hervorgegangen sind, wie *H. Poincaré*, der seine Laufbahn als ingenieur des mines angefangen hat. Die Hauptrolle für die Ausbildung der Mathematiker hat seit der Zeit jedoch die „École normale supérieure“ übernommen, welche ebenfalls schon 1794 gegründet und in ähnlicher Weise wie die École polytechnique eingerichtet ist, aber erst seit dem Rückgang der letzteren zu rechter Bedeutung gelangte. Schüler der École normale supérieure sind z. B., um nur die Älteren unter den jetzt Lebenden zu nennen: *G. Darboux*, *É. Picard* und *P. Appell*, während *C. Jordan*, der Senior der geometrischen Abteilung in der Académie des sciences, wiederum polytechnicien ist. —

Mit dem allmählichen Zurücktreten der École polytechnique verschob sich der Schwerpunkt des technischen Unterrichts nach Deutschland und der Schweiz. Karlsruhe und Zürich wurden die beiden führenden Anstalten, von denen um die Mitte des 19. Jahrhunderts eine moderne Organisation des technischen Studiums ausging — modern vor allem in der Einrichtung mehrerer getrennter Fachabteilungen im Gegensatz zu der in Frankreich weiter gepflegten Einheitlichkeit. Die „eidgenössische polytechnische Schule“ in Zürich wurde 1855 eröffnet*). Die Anstalt in Karlsruhe ist in ihren Anfängen älter, sie entstand 1832 durch Vereinigung mehrerer schon vorher bestehender Schulen.

An diesen beiden Anstalten wirkten von Anbeginn eine Reihe hervorragendster Vertreter der technischen wie der mathematischen Wissenschaften. Soll ich zunächst einige Namen von Technikern nennen, die auch nach mathematischer Seite ihre Bedeutung besitzen, so haben wir in Zürich: *K. Culmann*, von 1855 bis 1881, den Begründer der graphischen Statik; *F. Reuleaux*, von 1856 bis 1865 den Schöpfer einer besonderen Maschinenkinematik, die sich unter seinem Einfluß lange Zeit großer Popularität erfreute [man vergleiche Seite 61, Fußnote]; und endlich *G. Zeuner*, von 1855 bis 1870, den bekannten Thermodynamiker. Andrerseits wirkten in Karlsruhe: *J. F. Redtenbacher* 1841 bis 1863, und *F. Grashof* 1863 bis 1893 als Hauptvertreter der theoretischen Maschinenlehre.

Daneben hat sich dann aber auch ein lebhafter mathematischer Betrieb entwickelt. In Karlsruhe wäre vor allem *A. Clebsch* von 1856 bis 1863 zu nennen, der damals sein Lehrbuch der Elastizitätslehre**)

*) Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens des eidg. Polytechnikums, I: Geschichte der Gründung des eidgenössischen Polytechnikums mit einer Übersicht seiner Entwickelung 1855—1905, von *W. Oechsli*, im Auftrage des schweizerischen Schulrates, Frauenfeld (Huber) 1905.

**) Theorie der Elasticität fester Körper, Leipzig (Teubner) 1862.

verfaßte. In Zürich sehen wir die bekanntesten Mathematiker in raschem Wechsel aufeinander folgen: *E. B. Christoffel, H. Weber, H. A. Schwarz, G. Frobenius, F. Schottky*, und in neuerer Zeit dann *A. Hurwitz, H. Minkowski.* — Endlich darf ich auch die Vertreter der darstellenden Geometrie nicht vergessen: In Karlsruhe haben wir *Christian Wiener* von 1852 bis 1896; in Zürich *Th. Reye* von 1864 bis 1867 und *W. Fiedler* von 1867 bis jetzt.

Indem wir es bei dieser Aufzählung von Namen bewenden lassen, legen wir uns jetzt die Frage vor, welche Stellung die höhere Mathematik bis in die neunziger Jahre hinein in dem Unterrichte der deutschen technischen Hochschulen einnahm. Nun, wir müssen sagen, die Mathematik galt bei ihnen zunächst, wie an der École polytechnique, als die eigentliche Grundwissenschaft aller technischen Ausbildung, deren gewissenhaftes Studium für den angehenden Ingenieur unbedingt erforderlich sei. Neben ausgedehnten Übungen in der darstellenden Geometrie, im Vermessungswesen usw. wurden jetzt, ähnlich wie an den Universitäten, als Einleitung abstrakt-mathematische Vorlesungen gehalten, die auf die Technik kaum Rücksicht nahmen Ja auch die technischen Vorlesungen gestalteten sich bisweilen mehr zu Mathematikstunden heraus.

Als ein charakteristisches Beispiel dieser Art will ich die Vorlesungen *Grashofs* anführen. Seine „theoretische Maschinenlehre“*) ist ein durchaus mathematisches Buch mit scharfsinnigen Entwicklungen, aber das Interesse für die technische Wirklichkeit, wie es heute in Geltung ist, tritt darin stark zurück. Die mathematische Betrachtung setzt auf Grund plausibel scheinender Annahmen ein, ohne daß die wirklichen Verhältnisse durch Experimente hinreichend geklärt sind. Ich erinnere Sie, um von diesem Verfahren in etwa eine Idee zu geben, an die in den Lehrbüchern der Mechanik verbreitete Behandlungsweise der Lehre von der Reibung; man legt konventionelle Reibungsgesetze zugrunde, die durch Versuche unter ganz vereinfachten Verhältnissen gestützt werden, und läßt dabei das Wichtigste für die wirklichen Maschinen, den Einfluß von Schmiermitteln, außer acht! —

Eine durchgreifende Änderung in diesem Betriebe tritt mit dem Anfang der neunziger Jahre ein (ich bemerke auch, daß *Grashof* 1893 starb). Wieder werden die außerordentlichen Fortschritte, die rasche Expansion der Technik der Anlaß für die Zersprengung der alten, zu eng werdenden Formen. Man wendet sich schroff gegen das Prinzip der formalen Ausbildung: die Mathematik soll nicht eine „Grundwissenschaft“, sondern „Hilfswissenschaft“ des

*) 3 Bände, Hamburg und Leipzig (Voß) 1875/90.

technischen Studiums sein; der angehende Ingenieur soll vor allem anderen durch experimentelle Studien in die Ideenwelt der wirklichen Technik eingeführt werden. Bei diesen Bestrebungen hat stark die engere Fühlungnahme mit den amerikanischen Verhältnissen mitgewirkt, besonders seit der großen Weltausstellung in Chicago 1893. Wesentlich auf Anregung von dorther richtete man nun überall sogenannte Ingenieurlaboratorien an den Hochschulen ein, wo der Studierende gleich von vornherein zum Selbstanfassen, zum eignen Prüfen und Messen an wirklichen Maschinen angeleitet wird.

Indem man es sich so angelegen sein ließ, dem ganzen Betrieb an den technischen Hochschulen einen ausgesprochen technischen Charakter aufzuprägen, entwickelte sich gleichzeitig ein Konkurrenzkampf gegen die Universitäten. Man kann die ganze Entwicklung der technischen Hochschulen, dieser Kinder des 19. Jahrhunderts, als eine Vorbereitung auf einen solchen Kampf ansehen.

Soll ich kurz einige historische Angaben*) machen, so bestanden um 1830 herum in Deutschland folgende polytechnische Schulen: Berlin, Hannover und Karlsruhe (in Berlin die Gewerbeakademie und die Bauakademie noch getrennt). Um 1840 trat Stuttgart hinzu, um 1850 Dresden, um 1860 Braunschweig, um 1870 Darmstadt, München und Aachen. Seit der Mitte der siebziger Jahre kam entsprechend der Steigerung der Unterrichtsorganisationen der Name „technische Hochschule“ statt des früheren „polytechnische Schule“ oder „Polytechnikum“ bald allgemein zur Geltung. 1882 wurden die beiden genannten Berliner Anstalten zur technischen Hochschule in Berlin-Charlottenburg vereinigt. Bis in die jüngste Zeit hinein haben die bisher aufgezählten Anstalten für die zunehmende Frequenz der Ingenieure ausreichen müssen. Erst 1904 haben wir dann die neue technische Hochschule in Danzig bekommen, und für eine absehbare Zukunft erwarten wir noch eine weitere, nämlich in Breslau.

Was die Frequenz der technischen Hochschulen in Deutschland angeht, so hat die Gesamtzahl ihrer Studierenden im Lauf der Zeit stark geschwankt. Lassen Sie uns das wieder in graphischer Darstellung verfolgen**); in der Figur 8 [Seite 183] sind die Winterfrequenzen als Ordinaten genommen. Da haben Sie nun gleich nach dem Kriege 1870/71 ein starkes Anwachsen, das uns den damaligen

---

*) Man vergleiche *Lexis*' Unterrichtswesen [zitiert Seite 11] IV 1: Die technischen Hochschulen; überdies: Minerva, Jahrbuch der gelehrten Welt, herausgegeben von *R. Kukula* und *K. Trübner*, Straßburg (Trübner), **2** (1892/93).

) Nach einer Tabelle in dem gerade genannten Buche von *Lexis*; ergänzt nach den neusten Jahrgängen der ebenfalls gerade zitierten „Minerva“ **14 (1904/05), **15** (1905/06), **16** (1906/07).

Aufschwung in den technischen Berufen bekundet. Bald trat indes Überfüllung ein, und von dem Maximum des Winters 1876/77 mit 6500 ging es auf ein Minimum des Winters 1883/84 mit 3700 Studierenden hinab. Von da an ist dann die Gesamtzahl erst langsam, dann rascher zu einem weit höheren Maximum, nämlich auf 16800 im Winter 1902/03 gestiegen und beginnt nun erst wieder ein wenig abzunehmen. Die hier gezeichnete Figur, meine Herren, redet eine deutliche Sprache! Sie läßt erkennen, daß in den technischen Hochschulen eine Macht herangewachsen ist, welche im Vertrauen auf sich selbst eine weitgehende öffentliche Anerkennung und Geltung verlangen kann. In der Tat haben sie seit einem Jahrzehnt mit Eifer auf die äußere Gleichstellung mit den älteren Schwesteranstalten, den Universitäten, hingearbeitet. Dies Ziel ist 1899 erreicht worden in der Verleihung des Promotionsrechts an die technischen Hochschulen*); seit 1899 sind diese ermächtigt, den Titel „Dr. ing." zu erteilen, und bald hernach wurde an die Rektoren der technischen Hochschulen der Titel „Magnifizenz" verliehen, wie er an den Universitäten ja althergebracht ist.

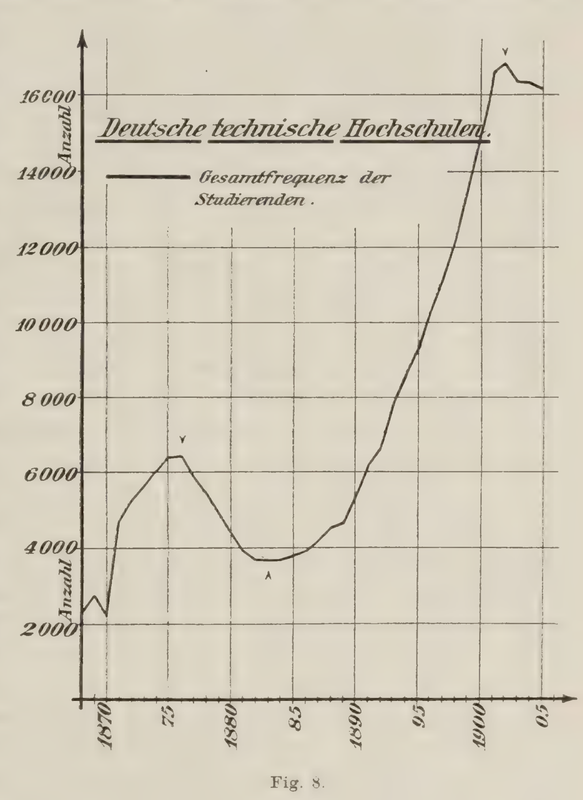


Fig. 8.

In diesen Ereignissen der Neuzeit müssen Sie das Resultat vorangehender heftiger Auseinandersetzungen erblicken. Der Mann, der in den Kämpfen um die Gerechtsame der technischen Hochschulen der Rufer im Streit war, ist *A. Riedler* in Charlottenburg. Seine

*) Bei Gelegenheit der Feier des hundertjährigen Bestehens der Berlin-Charlottenburger technischen Hochschule. (Die hundert Jahre beziehen sich auf die Anfänge der Gewerbeakademie.)

zahlreichen Kampfreden*) empfehle ich Ihnen zur Lektüre, damit Sie die Gedanken verstehen, welche der schließlich erfolgreichen Bewegung zugrunde liegen. Sie bilden von den an der Universität traditionellen Ideen gerade die Umkehrung. Da heißt es einmal: Die Wissenschaft soll nicht um ihrer selbst willen getrieben werden, sondern nur, um der Praxis zu dienen; wer bloß theoretisch etwas weiß, ist erst ein halber Mann. Und andrerseits: Den ganzen Unterricht soll von Anbeginn die Praxis beherrschen und durchsetzen; eine Vorlesung kann nicht in sich ihren Abschluß finden, sondern muß stets zur Praxis hinüberleiten. Also überall: Praxis unbedingt über Theorie!**)

Für uns wird die Frage sein, welche Stellung wir zu diesen Tendenzen zu nehmen haben[0]). Meine Herren, ich kann nur aussprechen, daß ich — von Übertreibungen bei *Riedler* abgesehen — vielfach zustimme. Ich bin selber überzeugt, daß der mathematische Unterricht an den technischen Hochschulen, so wie sie sich jetzt entwickelt haben, nicht in einseitig theoretischer Weise erteilt werden darf, sondern auf eine innige Durchdringung der mathematischen Ideen mit dem technischen Ferment abzielen muß. Andrenfalls bleibt für den angehenden Ingenieur die Mathematik ein unbrauchbarer Apparat. Es sind ihm Schlittschuhe angeschnallt, aber er kann sich damit nicht fortbewegen, sondern kommt beständig zu Fall, weil er so nicht hat laufen lernen. Natürlich wäre es töricht, nun mißmutig die Schlittschuhe beiseite zu werfen — der Ingenieur bedarf nun einmal der Mathematik, und darum soll auch sicher nicht das mathematische Niveau herabsinken. Es wird nur die besondere Kunst des Hochschullehrers sein, in solchem Kolleg die richtige Verbindung des Mathematischen mit dem Technischen zu treffen; da entscheidet außer der Kenntnis des ganzen Milieus schließlich immer der pädagogische Takt, der sich nicht nach einem Regelbuch erlernen läßt.

*) **a)** Zur Frage der Ingenieur-Erziehung, Berlin (Simion) 1895. **b)** Die Ziele der technischen Hochschulen, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure **40** (1896), Seite 301—309, 337—346, 374—375. **c)** Unsere Hochschulen und die Anforderungen des 20. Jahrhunderts, Berlin (Seydel) 1898. **d)** Die technischen Hochschulen und ihre wissenschaftlichen Bestrebungen, Rektoratsrede, Berlin (Hermann) 1899.

**) Die Berufschemiker halten übrigens im Gegensatz dazu auch heute daran fest, daß sie eine gründliche rein theoretische Ausbildung der heranwachsenden Studenten der Chemie wünschen.

[0]) Man vergleiche meine früheren diesbezüglichen Vorträge, die in der [Seite 3 zitierten] Ferienkursschrift von 1900, Seite 213—242, zusammen wiederabgedruckt sind: **a)** Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen (1895). **b)** Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtskandidaten (1896). **c)** Universität und technische Hochschule (1898).

Ich will nur noch bemerken, daß auch hier die Anpassung des Schulunterrichts an den Meraner Lehrplan dem Hochschullehrer eine gewisse Erleichterung bieten wird.

Wie haben sich aber die Universitäten zu der Ingenieurbewegung gestellt? Nun, zunächst hielten sie diese für etwas ganz Unberechtigtes, man suchte sie einfach durch Aburteilung oder durch Ignorieren zu beseitigen. Natürlich ohne Erfolg. Meine Herren, wenn eine große Bewegung im Innern des Volkslebens entsteht, dann ist es niemals angebracht, sie kurzweg zu verachten und über sie hinweggehen zu wollen; sondern wir müssen unseren Standpunkt von vornherein so hoch wählen, daß wir die Bewegung voll überblicken und unter dem Gesichtswinkel der gesamten kulturellen Entwicklung betrachten können, wogegen das einseitige Interesse irgend einer besonderen Institution durchaus in den Hintergrund tritt. Wir werden nicht an dem unfruchtbaren Bestreben, die Bewegung rückgängig zu machen, unsere Kräfte verzetteln; wir werden vielmehr eine Realpolitik einschlagen und fragen, wie wir unserem eignen Betriebe innerhalb der neuen Verhältnisse eine dem Ganzen zugutekommende Wirksamkeit sichern. Darum lautet unsere Parole gegenüber der Ingenieurbewegung: nicht Befehdung, sondern Kooperation mit den technischen Hochschulen! Entwicklung der Universitätseinrichtungen und ihrer spezifischen Leistungsfähigkeit in einem der Gesamtheit moderner Interessen förderlichen Sinne!

Das sind auch die Ideen, die unseren [Seite 170 ff.] gekennzeichneten Göttinger Einrichtungen für angewandte Mathematik und Physik zugrunde liegen. Und entsprechende Ideen vertrete ich überhaupt der modernen Entwicklung des ganzen Hochschulwesens gegenüber. Der große Entwicklungsprozeß, der sich unter anderem in dem fortgesetzten Hervortreten neuer Hochschularten in der Neuzeit zu erkennen gibt, ist natürlich noch lange nicht abgeschlossen; die Universität ihrerseits möge zusehen, daß sie bei diesen Umgestaltungen rechtzeitig die richtige Orientierung nimmt. —

Im Sinne der hier vertretenen mittleren Auffassung kann man nun befriedigt feststellen, daß auch der Verein Deutscher Ingenieure sich in neuerer Zeit zu ähnlichen Anschauungen bekannt hat. Entscheidend dafür sind die Beschlüsse einer Konferenz von Vertretern der Wissenschaft und Praxis des Ingenieurfachs, welche der Vorstand jenes Vereins im Herbst 1904 zu München veranstaltete. Entscheidend dafür sind auch die dann folgenden Beratungen des schon früher [Seite 66] erwähnten Ausschusses für Hochschul- und Unterrichtsfragen, der vom Ingenieurverein seitdem eingesetzt ist. Die Beschlüsse dieser Konferenzen [Zitat Seite 66] bekunden über

manche früher herrschende Meinungsverschiedenheit hinweg in der Tat eine volle Verständigung. Ich muß noch ein wenig auf jene Münchener Beschlüsse eingehen.

Als in den letzten Jahren die Pläne zur Gründung neuer technischer Hochschulen hervortraten, da warf man vielfach die Frage auf, ob es nicht zweckmäßig sei, solche Anstalten als neue Fakultäten an die bestehenden Universitäten anzugliedern. Es ist lebhaft darüber hin und her gestritten worden. Die Universitäten sprachen sich in früheren Jahren gegen die Angliederung aus, die Ingenieurkreise teilweise dafür. 1899 jedoch, d. h. nach Schaffung des Dr. ing., hat sich die Frontstellung beider Parteien geändert. In Breslau wurde seinerzeit bei der ablehnenden Haltung der Universität die Gründung einer technischen Hochschule in unabhängiger Stellung beschlossen. Das Umgekehrte aber erlebten wir neuerdings in Süddeutschland, wo sich das aufblühende Industriezentrum Nürnberg und daneben die alten Universitäten Erlangen und Würzburg um den Vorzug bewarben, Sitz einer zu gründenden technischen Hochschule zu werden. Dabei spielten natürlich kommunale Interessen mit eine Rolle. Nun, die Frage ist nicht mehr aktuell, da man den Plan einer Hochschule dort vorläufig hat fallen lassen und jetzt in Nürnberg eine technische Fachschule einrichten will. Aber es behält ein prinzipielles Interesse, daß sich die genannte Münchener Konferenz für folgenden Grundsatz ausgesprochen hat: Nicht Angliederung der technischen Hochschulen, sondern Selbständigkeit! doch es soll auf eine engere Fühlung der beiden Hochschularten hingearbeitet werden!

Meine Herren, diese gegenseitige engere Fühlung wird dadurch angebahnt, daß einerseits an den Universitäten die Technik gebührende Berücksichtigung findet, daß z. B., wenn es angeht, die angewandte Physik auch durch ein Maschinenlaboratorium vertreten wird, — und, daß andrerseits an den technischen Hochschulen auch die höhere Mathematik und Physik, und zwar innerhalb der eigentlichen Hochschulinteressen, eine volle Stellung erhalten sollen. Dieser letztere Punkt verdient ganz besondere Beachtung. Es dürfte außerordentlich wichtig sein, daß auch an technischen Hochschulen mathematisch-physikalische Spezialvorlesungen gehalten werden, wie etwa „Elektronentheorie" oder wie „Maxwellsche Gleichungen" für die Elektrotechniker — Vorlesungen, welche geradezu die Grundlage der modernen Physik sind und die dem Studierenden ermöglichen, bis zur Beherrschung solcher Wissenszweige durchzudringen, denen unzweifelhaft eine große technische Zukunft gehört. Die Ingenieure, welche sich nach dieser Seite hin weitergehend ausbilden, werden natürlich eine ausgewählte Minderheit sein. Außer ihnen aber werden vor allem die Kandidaten des höheren Lehramts, die an technischen

Hochschulen studieren, die Gelegenheit solcher Vorlesungen benutzen. Ich komme hierauf sogleich zurück.

Der zweite Punkt der Tagesordnung der Münchener Konferenz betraf das Interesse der technischen Kreise für die Fragen des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen. Anlaß dazu bot die in Aussicht stehende Beratung dieser Fragen auf der Breslauer Naturforscherversammlung. Es ergab sich, daß in dieser Hinsicht Kooperation zwischen den Ingenieuren und uns eintreten konnte, wie sich denn die Ingenieure auf der Breslauer Versammlung durch einen besonderen Delegierten vertreten ließen, der auch als Mitglied in die von der Versammlung gewählte Unterrichtskommission eintrat. Und auch weiterhin hat sich mit diesem Punkte der Unterrichtsausschuß des Ingenieurvereins beschäftigt. Er hat besonders nachdrücklich die Forderung erhoben, daß den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern dieselbe Bedeutung für die allgemeine Bildung zuzuerkennen ist wie den sprachlich-historischen.

Schließlich ist eine äußerst wichtige Frage, die ebenfalls schon auf der Münchener Konferenz zur Sprache kam, das Studium der Kandidaten des höheren Lehramts an der technischen Hochschule. Allgemein zu reden möchte ich hier befürworten, dem mathematisch-physikalischen Lehramtskandidaten überhaupt freizustellen, beliebig an technischen Hochschulen wie an Universitäten zu studieren — natürlich eine passende Vertretung der höheren Mathematik und Physik dort vorausgesetzt. Eine solche Forderung liegt ganz im Sinne der Schulreform von 1900 und würde eine konsequente Durchführung der damals aufgestellten Prinzipien darstellen. In der Tat haben die technischen Hochschulen für unser ganzes kulturelles Leben eine wachsende Bedeutung; es ist eine Bildungspflicht, daß man den späteren Lehrern die freieste Möglichkeit bietet, den dortigen Betrieb aus eigner Anschauung gründlich kennen zu lernen.

Sehen wir zu, wie es bisher mit dem Studium von angehenden Lehrern an der technischen Hochschule bestellt ist (wobei ich mich übrigens wieder nur auf preußische Verhältnisse beziehe). Unsre Prüfungsordnung von 1898 gestattet, daß der Kandidat von den obligaten sechs Semestern bis zu drei Semestern an einer technischen Hochschule zubringen darf, d. h. der Kandidat muß am Schluß seines Studiums mindestens drei Universitätssemester nachweisen können. Ziehen wir nun in Rechnung, daß der Durchschnitt unserer Lehramtskandidaten wohl neun Semester studiert, so können wir sagen, daß also etwa sechs Semester an technischen Hochschulen zugebracht werden dürfen. Das ist an sich durchaus nicht wenig. Aber nun kommt die große Hinderung, auf die ich schon anspielte. An unseren

technischen Hochschulen können die Mathematiker und Physiker in den ersten drei Semestern zwar vortrefflich vieles lernen, von da an jedoch wird ihnen wenig für sie Passendes und manchmal gar nichts geboten. Hier setzen nun eben die vorhin ausgesprochenen Wünsche ein, daß an den technischen Hochschulen auch höhere, technisch gefärbte mathematische und physikalische Vorlesungen gehalten werden müssen, die jenen Lehramtskandidaten und zugleich fortgeschrittenen Ingenieuren, welche Neigung dazu haben, zur Förderung dienen.

Darüber hinaus aber würden diese Vorlesungen noch einen dritten Zweck erfüllen; sie wären gerade die geeignete Vorbildung für die angehenden Mathematik- und Physiklehrer technischer Fachschulen. Solche Kandidaten können offenbar an den Universitäten — und wenn Sie selbst Göttingen mit seinen mannigfachen Unterrichtseinrichtungen nehmen — nicht wohl eine adäquate Ausbildung erfahren, in dem Maße wie es an den technischen Hochschulen möglich wäre. Und ich habe Ihnen ja schon [Seite 65] von den Mißständen gesprochen, die an jenen Fachschulen recht verbreitet sind: daß die Mathematik bald von einem reinen Mathematiker unterrichtet wird, der von Technik nichts versteht, bald von einem ergrauten Praktiker, der sich womöglich autodidaktisch ein wenig Mathematik angequält hat. Die hier berührten Verhältnisse sind freilich bei uns in Preußen einigermaßen schwierig umzugestalten. Die technischen Fachschulen und die Hochschulen unterstehen nämlich verschiedenen Ministerien, erstere dem Handelsministerium, letztere dem Kultusministerium, und es ist wohl nicht recht gebräuchlich, daß zwei so getrennte Verwaltungsressorts in ausgedehnter Weise aufeinander Bezug nehmen*).

Neben den hier erwähnten mathematischen und physikalischen Spezialvorlesungen möchte ich dann für die Lehramtskandidaten an den technischen Hochschulen noch eine enzyklopädische Einführung in die Technik verlangen. Wenn jetzt der Lehramtskandidat an der technischen Hochschule gemäß seinen Bedürfnissen ein wenig in die Technik eindringen will, so sieht er sich in die unbequeme Lage versetzt, irgend welche technische Spezialkollegien oder Spezialübungen zu besuchen, die eigentlich nur für Techniker bestimmt sind. Dies kann nicht als zweckmäßig angesehen werden, denn es kostet zu viel Zeit, und man erreicht doch nicht das, was angestrebt wird: nämlich einen Überblick über das verzweigte Gebiet der

*) Neuerdings scheinen übrigens diese Verhältnisse in Fluß zu kommen. Man vergleiche die seit kurzem in zwanglosen Heften erscheinende Zeitschrift: Technik und Schule, Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten, herausgegeben von *M. Girndt*, Leipzig (Teubner).

Technik. Beim Studium der Naturwissenschaften an der Universität liegt die Sache ja ganz analog. Dem Zoologen z. B., der für sein Fach allgemeine anatomische Kenntnisse braucht, wird man vernünftigerweise nicht zumuten, daß er ebenso ausführlich normale und pathologische Anatomie — beachten Sie: allein des Menschen — treibt wie der Mediziner. Er will nur einen Einblick in dieses Gebiet gewinnen und nicht selbst Mediziner werden. Ganz ebenso kommt es auch dem Lehramtskandidaten an der technischen Hochschule nicht auf die Aneignung zahlreicher technischer Spezialkenntnisse an, sondern doch nur auf eine einfache Anleitung zum Verständnis seiner technischen Umgebung.

Den dargelegten allgemeinen Erwägungen entsprechend hat denn auch jene Münchener Konferenz Beschluß gefaßt, und in derselben Richtung liegen die neusten Aussprüche des Unterrichtsausschusses des Ingenieurvereins, auf die ich Sie vorhin bereits verwies. Dieser Ausschuß arbeitet — das mögen Sie im Auge behalten — unabhängig von unserer Breslauer Kommission, aber wesentlich in dem gleichen Sinne. Endlich will ich noch anfügen: es soll nicht ein Ausspielen von Edelmut sein, wenn wir uns an der Universität in der geschilderten Weise eine Konkurrenz der technischen Hochschulen bei der Ausbildung der Lehramtskandidaten herbeiwünschen. Ich denke vielmehr, es liegt gerade im *Interesse der Universitäten selber*, einen solchen Wettstreit zu schaffen! Denn das vermag am besten eine Erschlaffung der Arbeitskraft zu verhindern, die ja überall die größte Gefahr der Entwicklung ist. —

Meine Herren, wir sind am Schluß des ersten Teils dieser Vorträge angelangt. Lassen Sie uns den zurückgelegten Weg kurz *noch einmal überschauen*. Wir haben in sieben Kapiteln nacheinander die verschiedenen Schularten, die Volksschulen, die höheren Knaben- und Mädchenschulen, die Fachschulen und endlich die Hochschulen, in ihrer Organisation hinsichtlich des mathematischen Unterrichts betrachtet; und wir haben, gestützt durch einige Kenntnis des geschichtlichen Werdegangs und durch Vergleichung nebeneinander bestehender Einrichtungen, nicht nur Kritik am Vorhandenen geübt, sondern auch mannigfache Verbesserungsvorschläge zu machen gesucht. Insbesondere war meine Absicht, Ihnen die innere Berechtigung unseres Meraner Lehrplans darzulegen. Das Hauptinteresse lag eben für unsere Betrachtung in dem mathematischen Unterricht der höheren Knabenschulen, und mit diesen haben wir uns darum am ausführlichsten beschäftigt. Aber doch nahmen wir beständig wieder Ausblick aufs Ganze, um nicht zu engherzigen und einseitigen

Urteilen zu gelangen. Und ich denke, Sie haben die Überzeugung gewonnen: nur so ist Wesen und Bedeutung des mathematischen Unterrichts voll zu erfassen, daß man ihn im Rahmen des gesamten Bildungsorganismus studiert.

Manches von dem, was Sie in diesen Vorträgen vielleicht zum erstenmal gehört haben, mag Sie jetzt noch fremdartig anmuten; aber doch glaube ich, Sie haben etwas von Wert gelernt. Leider ist eine solche Art, „Pädagogik" zu treiben, wie wir es hier getan haben, kaum schon sonstwo in Gebrauch. Der angehende Lehrer wird an der Universität meist nur in der sogenannten „allgemeinen Pädagogik" und „Geschichte der Pädagogik" unterwiesen, wobei man gern unter letzterer allein eine Geschichte der Ansichten großer Pädagogen versteht. Mir scheint es allerdings daneben ganz besonders wertvoll, wenn Sie auch die Organisation unseres ganzen Bildungswesens auf historischer Grundlage verstehen lernen. Eine umfassende Schul- und Hochschulkunde, welche alles — die verschiedenen Zeiten, die verschiedenen Länder, die mannigfachen Anstaltsarten, die sämtlichen Unterrichtsfächer — überschaut und nach Gebühr voll berücksichtigt, das fehlt freilich bisher ganz*) Gerade der eine Punkt wird auch für den einzelnen schwer erreichbar sein: eine freie und gleichmäßig gerechte Wertung aller Fächer. Darum erscheint es eben geboten, daß vorderhand die einzelnen Fachvertreter, jeder von seiner Seite her, die Aufgabe in Angriff nehmen — wie wir es denn auch in der Breslauer Unterrichtskommission bei der Reform des Unterrichts der höheren Schulen machen. Hier wie dort aber, meine Herren, soll jeder beständig die Losung beherzigen: Nicht Kampf aller gegen alle! sondern gegenseitige Würdigung und kräftiges Zusammenwirken, das sei das schließliche Ziel! —

---

*) Als einen ersten Schritt auf dem angedeuteten Wege kann man die beiden folgenden Bücher ansehen, die ich zum Schluß gern noch nennen möchte: **a)** *H. Morsch*, Das höhere Lehramt in Deutschland und Österreich, ein Beitrag zur vergleichenden Schulgeschichte und zur Schulreform, Leipzig (Teubner) 1905. **b)** *O. Schröder*, Die Ordnung des Studiums für das höhere Lehramt in Deutschland und die gesetzlichen Prüfungsbestimmungen in den einzelnen Bundesstaaten, Leipzig (Beyer) 1906.

WIEDERABDRUCK
ZWEIER AUFSÄTZE VON F. KLEIN

SOWIE DES

MERANER LEHRPLANS.

Anhang A.

Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen.

Vortrag von *F. Klein*, gehalten in Breslau gelegentlich der allgemeinen Debatte über den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Schulen am 22. September 1904. Im Text zitiert Seite 5. Abgedruckt aus den Verhandlungen der Naturforscherversammlung **1904**, I, Seite 130—144 (dort unter dem Titel: Bemerkungen zum mathematischen und physikalischen Unterricht).

Hochverehrte Anwesende! Ich möchte Ihnen als Einleitung zu dem von mir zu gebendem Referate einige Schriften vorlegen, welche ich mit meinen Göttinger Kollegen zusammen, insbesondere meinem alten Freunde *E. Riecke*, über die hier in Betracht kommenden Fragen neuerdings veröffentlicht habe. Diese Schriften sind aus dem Ferienkurs für Oberlehrer der Mathematik und Physik entstanden, welcher alle zwei Jahre in Göttingen statthat*) und an dem *Riecke* und ich nach dem seitherigen Turnus alle vier Jahre beteiligt waren. Besagter Kurs gibt uns in längeren Intervallen willkommenen Anlaß, uns darauf zu besinnen, was wir den Herren, die zu uns kommen, nicht nur an neuen Ergebnissen der wissenschaftlichen Forschung, sondern auch an Überlegungen und Nachweisen, die für den Unterricht an den höheren Schulen unmittelbar dienlich sein möchten, mitgeben können. Ich habe hier zunächst einen ersten Sammelband hierher gehöriger Vorträge, der unter dem Titel: Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an

*) In den Zwischenjahren (1901, 1903 usw.) findet dann jeweils ein Ferienkurs in den anderen naturwissenschaftlichen Fächern statt.

den höheren Schulen im Jahre 1900 erschien (Leipzig, Teubner). Der Titel läßt ja auch den Fernerstehenden erkennen, um welchen besonderen Stoff es sich handelt. Ich will aber zur Orientierung hinzufügen, daß der Ruf nach stärkerer Berücksichtigung der Anwendungen im mathematischen und physikalischen Unterricht seit 1890 etwa an den höheren Schulen wie an den Universitäten immer stärker hervorgetreten ist, und daß es sich nun darum handelte, Inhalt und Bedeutung der neu herankommenden Gebiete in übersichtlicher Darstellung vorzuführen*). Die neue Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten von 1898 hat angewandte Mathematik geradezu als neues Prüfungsfach eingeführt. — Ich habe hier ferner die beiden ersten Hefte eines neuen Sammelbandes (Leipzig, Teubner, 1904), der von vornherein als ein Beitrag zu der heute in Breslau stattfindenden Debatte geplant war, — es fehlt noch das dritte Heft, in welchem *Fr. Schilling* (bisher Göttingen, nunmehr Danzig) über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie handelt; dasselbe hat wegen der vielen Figuren leider noch nicht völlig fertiggestellt werden können. Trotzdem mag hier vorweg gerade auf dieses Heft verwiesen sein, weil mir daran liegt, hervortreten zu lassen, daß bei unserer Anteilnahme an den Reformbestrebungen des mathematischen und physikalischen Unterrichts die Fürsorge für die Entwicklung der Raumanschauung keineswegs zurücktritt, wir umgekehrt derselben, indem wir dem Worte „darstellende Geometrie" die denkbar weiteste Interpretation geben, ganz besondere Sorgfalt zuteil werden lassen möchten. Das zweite Heft (um rückwärtsgehend den Bandinhalt aufzuzählen) bringt neben pädagogischen Erwägungen über Inhalt, Methode und Ziel des physikalischen Unterrichts an den Schulen, (die den weiter unten noch ausführlicher zu nennenden Tendenzen parallel gehen), insbesondere auch einen flott geschriebenen Artikel von *K. Schwarzschild* über astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln**). Das erste Heft endlich mit dem Titel: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen behandelt in Aufsätzen von *E. Götting*

*) Die Einzelvorträge waren: *E. Riecke*, Geschichte des physikalischen Unterrichts; *F. Klein*, Allgemeines über angewandte Mathematik und insbesondere technische Mechanik; *Fr. Schilling*, Darstellende Geometrie; *E. Wiechert*, Geodäsie; *G. Bohlmann*, Versicherungsmathematik; *Eug. Meyer*, Wärmekraftmaschinen; *Th. Des Coudres*, Elektrotechnik.

**) Die physikalischen Beiträge sind: *E. Riecke*, Grundlage der Elektrizitätslehre mit Beziehung auf die neueste Entwickelung; *O. Behrendsen*, Physik und Chemie an den höheren Schulen; *J. Stark*, Physik an der Schule; *E. Bose*, Kurse in physikalischer Handfertigkeit.

und mir die brennende Frage, ob und inwieweit elementare Teile der Differential- und Integralrechnung in den Schulunterricht hineingenommen werden sollen. Wir befürworten diese Maßregel ganz allgemein (d. h. für alle Schulgattungen), aber zugleich in vorsichtigster Weise. Ersteres, weil ein Verständnis der mathematischen Elemente unserer modernen Kultur ohne Kenntnis und Beherrschung des Funktionsbegriffs (wenigstens in seiner anschaulichen, durch den Verlauf einer Kurve gegebenen Form) unmöglich scheint, wogegen andere, von früher überkommene, aber für den allgemeinen Schulzweck nicht mehr gleich wichtige Teile der Mathematik zurücktreten können, — letzteres, weil in keiner Weise die Meinung sein kann, das mathematische Pensum unserer Gymnasien oder höheren Realanstalten zu vermehren oder auch nur zu erschweren. Weiter hierüber in Einzelheiten einzugehen, verbietet sich im Augenblicke von selbst und ist auch insofern nicht nötig, als der Gegenstand gestern in einer gemeinsamen Sitzung der nächstbeteiligten Sektionen bereits eingehend durchgesprochen wurde.

Verzeihen Sie, daß ich solange bei diesen Göttinger Schriften verweilte. Sie erkennen jedenfalls, daß ich mit meinen Kollegen zusammen schon seit Jahren den uns zunächst betreffenden Unterrichtsfragen unserer höheren Schulen besondere Aufmerksamkeit zuwende und ich also an das heutige Referat nicht etwa, wie man vielleicht glauben möchte, vom einseitigen Standpunkte des Universitätsmathematikers heranging. Immer aber schien mir als Vorbereitung zu dem Referate erwünscht, meine Kenntnis der Verhältnisse auch noch durch weitere persönliche Bezugnahme mit denjenigen Kreisen zu ergänzen, die entweder mitten in der Unterrichtsarbeit an den höheren Schulen stehen oder aber dem mathematischen und physikalischen Unterricht unter anderen Gesichtspunkten besonderes Interesse zuwenden.

In ersterer Hinsicht darf ich anführen, daß ich nicht nur mit vielen einzelnen hervorragenden Lehrern höherer Schulen ausführlich Bezug nahm, sondern insbesondere auch mit den offiziellen Vertretern desjenigen Oberlehrervereins, der allen hierher gehörigen Problemen seit Jahren besondere Aufmerksamkeit widmet, des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften; ich nehme an, daß der Vorsitzende dieses Vereins, Herr *Pietzker*, der hier anwesend ist, hernach selbst das Wort ergreifen wird. Einer der größten Schäden, unter welchen der Betrieb der mathematisch-naturwissenschaftlichen Studien seither in Deutschland litt, war die Entfremdung zwischen den Vertretern der höheren Schulen und der Hochschulen; möge dieselbe durch die persönliche Aussprache der letzten Tage wenigstens auf dem Gebiete der Mathematik dauernd überwunden sein!

Ferner aber kann ich berichten, daß ich an einer Vorbesprechung der uns heute interessierenden Unterrichtsfragen teilnahm, welche der Verein Deutscher Ingenieure im Hinblick eben auf unsere Breslauer Verhandlungen in voriger Woche in München veranstaltete. Es genüge zu sagen, daß sich dort im allgemeinen eine erfreuliche Übereinstimmung hinsichtlich aller Grundfragen zeigte. Der Verein Deutscher Ingenieure hat es sich nicht nehmen lassen wollen, an der heutigen Besprechung durch eigene Delegierte teilzunehmen, insbesondere wird der Kurator des Vereins, Herr *v. Borries*, hernach eine programmatarische Erklärung des Vereins zur Kenntnis der Versammlung bringen. Ich begrüße dieses Zusammengehen des Ingenieurvereins mit der Naturforscherversammlung auch aus allgemeinen Gründen mit besonderer Freude: vereint werden wir, zunächst in der Unterrichtsfrage, ein ganz anderes Gewicht haben, als wenn jeder einzeln operiert. Es sind übrigens bereits auch Vorbereitungen im Gange, welche eine entsprechende Verbindung mit den maßgebenden Kreisen der praktischen Chemiker anbahnen sollen. Wenn aber jemand fürchten sollte, bei diesen Verbindungen würden die Interessen der theoretischen Wissenschaft unbillig zurückgedrängt, so meine ich, antworten zu können, daß dies von keiner Seite beabsichtigt wird, daß die Verhandlungen vielmehr von vornherein in besonnener Erwägung aller nebeneinander in Betracht kommender idealer und praktischer Gesichtspunkte geführt werden sollen.

Hochgeehrte Anwesende! Wenn ich solcherweise einigermaßen vorbereitet vor Sie hintrete, so beabsichtige ich trotzdem heute noch in keiner Weise, so wenig wie mein verehrter Herr Vorredner, Ihnen bestimmte Thesen vorzulegen oder gar Sie um Annahme von Thesen zu bitten. Der Gegenstand ist dazu viel zu umfangreich und vielseitig, insbesondere auch das Verhältnis zwischen den biologischen Wünschen und denjenigen, die ich zu vertreten habe, noch nicht genügend geklärt. Die Formulierung bestimmter Thesen wird später möglich sein, wenn erst die Dinge, wie ich hoffe, in einer größeren von der Naturforscherversammlung einzusetzenden Kommission allseitig durchgesprochen sein werden. Heute ist meine Aufgabe nur, Sie über die neueren Bestrebungen und die hervortretenden Bedürfnisse auf den Gebieten des mathematischen und physikalischen Unterrichts unserer höheren Schulen im allgemeinen zu orientieren und damit hoffentlich Ihr ganzes Interesse für diese Fragen und Ihre dauernde Mitwirkung zur Förderung derselben zu gewinnen. Die philologischen Kreise können uns ein Vorbild sein! Sowie durch die Schulreform von 1900 die neue Grundlage gegeben war, haben sie mit größtem Eifer eingesetzt, um innerhalb der neu gegebenen Be-

dingungen ihren Unterrichtsbetrieb von innen heraus zu beleben und zu kräftigen. Die Vertreter der alten wie der neuen Sprachen sind gleichmäßig an der Arbeit. Dabei zeigt sich eine erfreuliche Kooperation aller beteiligten Kreise an Schule und Universität und eine uns bislang unbekannte Unterstützung auch durch die Schulbehörden. Möchten wir bald auf unserer Seite von etwas Ähnlichem berichten können!

* * *

Um nunmehr zu besonderen Bemerkungen über den mathematischen Unterricht überzugehen, muß ich zunächst erwähnen, was Ihnen allen bekannt genug ist, nämlich, daß im letzten Jahrzehnt in ausgedehnten Kreisen, die weit auch in den Bereich der Naturforschergesellschaft hereingreifen, eine stark antimathematische Strömung hervortrat, die wie eine mächtige Woge den Besitzstand überflutet, dessen sich die Mathematik in Wissenschaft und Unterricht seither erfreute, und denselben vielfach wegzuschwemmen droht. Die philosophische Überlegung: daß Wogen vorüberziehen, daß auf schlechtes Wetter immer wieder auch gutes folgt, erschöpft glücklicherweise nicht das, was Ihr Referent zu dieser Erscheinung zu sagen hat. Ich habe vor allen Dingen auszusprechen, daß die gesamte Bewegung ihre Stärke aus gewissen Einseitigkeiten zieht, mit denen der mathematische Gedanke vielfach zur Geltung gebracht wurde. In den Gebieten der Anwendungen ist es der verfrühte mathematische Ansatz, der ohne genauere Kenntnis der in Wirklichkeit maßgebenden Bedingungen vorangestellt wird und dann das Interesse von der Erfassung der eigentlichen Fragen ablenkt; beim Unterricht ist es die ausschließliche Betonung der logischen Zusammenhänge unter Zurückschiebung der psychologischen Momente. Die logische Überlegung ist für die Mathematik, was das Skelett für den tierischen Organismus (der ohne das Skelett keinen Halt hat), aber es wäre eine merkwürdige Zoologie und ein sehr verfehlter zoologischer Unterricht, der vom Beginn an nur von dem Knochengerüst der Tiere handeln wollte! Es fehlt die Zeit, um diese Bemerkungen hier weiter auszuführen. Hoffen wir, daß die Einseitigkeiten, die bei uns bestanden haben mögen, in nicht zu ferner Zeit überwunden sein werden und daß dann der mathematische Gedanke nach der ihm innewohnenden unzerstörbaren Kraft in neuer Stärke hervortreten wird! Dies ist jedenfalls das Programm, welches ich gegenüber der berührten Frage vertrete.

Glücklicherweise kann ich nun ferner berichten, daß der Umschwung in der Vertretung der Mathematik nach außen hin, den ich allgemein befürworte, im Unterrichte an den höheren Schulen

schon lange Zeit eingeleitet und weit fortgeschritten ist. Die Bewegung reicht in ihren Anfängen mindestens 30 Jahre zurück, aber hat bis jetzt, wie es scheint, in allgemeinen Kreisen noch nicht diejenige Beachtung gefunden, die sie verdient. Da ist zunächst die Voranstellung der genetischen Unterrichtsmethode statt der in früheren Dezennien herrschenden deduktiven, sodann die selbständige Pflege der Raumanschauung durch Konstruktion und Zeichnung (auf die ich schon in meinen einleitenden Bemerkungen Bezug nahm), endlich die Berücksichtigung der Anwendungen beim Unterricht, die ich ebenfalls bereits nannte —, also der Beziehungen der Mathematik zu der exakten Naturwissenschaft und allen der mathematischen Formulierung fähigen Gebieten des Lebens. Das logische Element soll darum nicht verkümmern, sondern auf Grund der anderweitigen begleitenden Entwicklungen allmählich, von Klasse zu Klasse fortschreitend, immer deutlicher herausgearbeitet werden. — Und hier ordnet sich nun das, was ich mit meiner neuen Schrift will, als eine Fortsetzung des Begonnenen ein. Das funktionentheoretische Denken in der sozusagen naiven Form, in der es von den großen Mathematikern des 18. Jahrhunderts entwickelt wurde, also die elementare Lehre von der Differential- und Integralrechnung, hat im Laufe des 19. Jahrhunderts alle Gebiete exakter Forschung immer vollständiger durchdrungen, — von der Physik beginnend, die sich in dieser Hinsicht als erste neben die von je mathematisch formulierte und darum als Vorbild dienende Astronomie stellte, bis hin zur Statistik und dem Versicherungswesen. Den Unterricht an den höheren Schulen so zu führen, daß der Schüler instand gesetzt werde, die solcherweise gewonnene Geltung der Mathematik nach ihrer allgemeinen Bedeutung zu verstehen, das ist die Aufgabe.

Ich will doch ausdrücklich aussprechen, daß ich die Gedanken, welche ich in dieser Hinsicht in meiner neuen Schrift entwickele, keineswegs als neue Entdeckungen ansehe. Sie finden in der Schrift selbst vielfache Bezugnahme auf andere Autoren, welche dasselbe Ziel verfolgen, insbesondere die sehr bemerkenswerten neuen Bestrebungen der Franzosen. Sie finden auch die Angabe, daß sich die Praxis unsrer Schulen, ohne daß dies nach außen besonders hervortritt, dem Ziele, welches ich befürworte, bereits wesentlich genähert hat. Ich habe für vielfache Zuschriften und Mitteilungen zu danken, die mich hierüber noch genauer belehrten. Um nur zwei Namen zu nennen, die ich in meiner Schrift noch nicht aufführte, so verweise ich hier auf die Programmabhandlungen von *Seeger* († Direktor des Realgymnasiums in Güstrow), wo in überzeugender Weise dargetan wird, daß man in der Physik ohne eine systematische Ausein-

anderlegung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung nicht auskommt, wenn man sich nicht ungenauester Ausdrucksweisen und doch wieder sehr gequälter Überlegungen bedienen will*), dann auf verschiedene Publikationen von *A. Höfler* (damals in Wien, jetzt in Prag), der schon vor Jahren einer Einführung der Differential- und Integralrechnung in beschränkter Form auch in den Unterricht der humanistischen Gymnasien das Wort redete**). Es gilt nicht mehr, neue Gedanken zu finden, sondern die richtigen Gedanken innerhalb der gegebenen Verhältnisse in richtiger Weise zur Geltung zu bringen. Wir wären weiter, wenn das verflossene Jahrhundert der Verbreitung allgemeinerer mathematischer Kenntnisse in weitere Kreise nicht vielfach ungünstig gewesen wäre. So hat der herrschende Neuhumanismus mit seinen vorwiegend literarisch-ästhetischen Interessen mannigfach hemmend gewirkt, — für den Neuhumanismus kommt die Mathematik, wenn überhaupt, so nur nach ihrem formalen Werte, nicht nach ihrem Inhalt in Betracht, im strikten Gegensatz zu der Wertschätzung, deren sich unsre Wissenschaft im Zeitalter des Rationalismus erfreute. Eine besondere Hemmung hat sich aber auch daraus ergeben, daß die mathematischen Forscher, insbesondere an den Hochschulen, in ihrer Mehrzahl ausschließlich von den Interessen ihrer Spezialität beherrscht waren. Sollte die Hoffnung trügen, daß sich mit dem beginnenden 20. Jahrhundert ein Umschwung zugunsten der hier vertretenen Tendenzen vorbereitet?

Es ist ja unmöglich, hier tiefer in Einzelheiten einzugehen. Daher will ich den Unterschied der humanistischen Gymnasien und der höheren Realanstalten hinsichtlich der von ihnen zu erreichenden Ziele des mathematischen Unterrichts nur eben streifen. Das Wesentliche für die von mir vertretene Auffassung ist, daß sich der mathematische Unterricht in das allgemeine Lehrziel der jeweiligen Schule einfügt. Er wird also an den humanistischen Gymnasien mehr nach historischer sowie nach philosophischer Seite ausgreifen, an den Realanstalten mehr nach seiten der Anwendungen und der praktischen Fähigkeiten. Alles übrige lasse ich an dieser Stelle unbestimmt, indem ich wegen der Ausführungen auf meine Schrift verweise (in der u. a. von einem spezifisch mathematisch-

*) Man sehe z. B. die Programmabhandlung des Realgymnasiums zu Güstrow: „Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung" (Ostern 1894). — Ein Mittelpunkt für den Betrieb der Infinitesimalrechnung ist seit Anfang der 70er Jahre insbesondere auch das Wiesbadener Realgymnasium gewesen.

**) Vergl. z. B. „Bemerkungen zu den Berliner Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts." (Österreichische Mittelschule, V. Jahrgang. Wien 1891.)

naturwissenschaftlichen Ideale der höheren Realanstalten die Rede ist). Hier kann nur das für alle Schulgattungen gemeinsam Geltende klar hingestellt werden. Ich werde in dieser Hinsicht noch sagen, daß der mathematische Unterricht, wie ich ihn hier befürworte (übrigens soweit in genauer Übereinstimmung mit den 1901 erschienenen neuen preußischen Lehrplänen), zur wesentlichen Entlastung der Nachbarfächer beitragen wird. Denn wir werden in der Lage sein, die mathematische Behandlung physikalischer Aufgaben, die in den physikalischen Stunden die freie Entfaltung des physikalischen Gedankens so häufig hemmt, in die mathematischen Stunden hereinzunehmen, ebenso beispielsweise die für die Schule unerläßlichen mathematischen Entwicklungen aus den Gebieten der Geographie und Astronomie. Wir werden in dieser Hinsicht die besten Freunde der Naturwissenschaften sein und verlangen dafür nur eines: daß man uns die bisherige Stundenzahl beläßt (4 Stunden auf den Oberklassen der Gymnasien, 5 Stunden desgl. auf den Realanstalten). Es ist an sich ein Unding, die Stundenzahl eines Faches in dem Augenblicke vermindern zu wollen, wo man demselben erweiterte Aufgaben stellt. Wir brauchen unsere jetzige Stundenzahl, weil der mathematische Unterricht nur erfolgreich ist, wenn er mit einer gewissen Breite auf den Schüler wirkt, sodaß dieser sich das Gehörte als wirkliches geistiges Eigentum erwirbt, wozu fortwährende Übung an Aufgaben und vielfache Wiederholung unerläßlich ist. Nach dem Urteil aller erfahrenen Lehrer, mit denen ich hierüber sprach, sind hierfür die seither geltenden Stundenzahlen eben ausreichend. Es ist also sehr bedenklich, daß die Reformgymnasien die Zahl der Mathematikstunden auf den oberen Klassen auf drei herabgesetzt haben; die Stundenvermehrung, welche sie dafür der Mathematik in den mittleren Klassen konzediert haben, scheint um so weniger ein Äquivalent zu bieten, als in den Oberklassen der Reformschulen, wie schon mein geehrter Herr Vorredner betonte, alle Unterrichtsenergie den sprachlichen Fächern zugute kommt. Wir protestieren namentlich aber auch gegen die Verordnung von 1892, die den mathematischen Unterricht auf der Tertia der Gymnasien, trotzdem dort Geometrie und Algebra beide zum ersten Male in wissenschaftlicher Form einsetzen, auf nur drei Stunden herabdrückt.

Ich habe endlich an meine engeren Fachgenossen eine Bitte. Im Bereiche der hohen mathematischen Forschung stehen zurzeit die Untersuchungen über die Grundlagen unserer Wissenschaft, ihre Voraussetzungen oder, wie man lieber sagt, ihre Axiome im Vordergrund des Interesses. Es liegt so nahe, daß ein eifriger Mathematiker es unternimmt, die hierin erreichten Fortschritte in den Schulunterricht

hineinzutragen. Geschieht dies in vorsichtiger Form, mehr andeutungsweise, in Prima, vor Schülern, die der Lehrer erfolgreich an abstraktere Gedankengänge gewöhnt hat, so wird dies niemand tadeln. Aber es gibt Verfasser, die ihre für die Schule bestimmten Lehrbücher mit einer ausführlichen und abstrusen Darlegung neuer Axiomsysteme beginnen. Das mag wissenschaftlich sehr interessant sein — bei unseren Lehrern werden sie damit keinen Erfolg haben. Die deutsche Schule, wie sie sich in den letzten Jahrzehnten entwickelt hat und entwickeln mußte, weist solche Versuche unbedingt zurück. Ihr erster Grundsatz ist, überall an die Fassungskraft und das natürliche Interesse ihrer Zöglinge anzuknüpfen. Das Vorbild des Euklid, mit dem man von je das entgegengesetzte Verfahren gestützt hat, ist irreleitend. Man sollte jeder Ausgabe des Euklid vordrucken, daß der große Verfasser der „Elemente" ganz gewiß nicht für Knaben geschrieben hat! Im übrigen, wenn Sie hierüber und über sonstige Fragen des mathematischen Unterrichts Ausführlicheres von berufener Seite suchen, so verweise ich Sie auf die Vorträge, welche hervorragendste französische Mathematiker hierüber im letzten Sommer gehalten haben*). Lesen Sie insbesondere, was dort *H. Poincaré* über die spezielle hier vorliegende Frage sagt**).

* * *

Gestatten Sie mir nunmehr, hochgeehrte Anwesende, entsprechende Ausführungen über den physikalischen Unterricht. Daß der physikalische Unterricht an den Schulen einen ganz anderen Zweck hat, als der mathematische, daß er naturwissenschaftliche Beobachtung und naturwissenschaftliches Denken zu üben hat und daß hierbei die Mathematik nur die Bedeutung eines allerdings unerläßlichen Werkzeugs hat, darüber sind nachgerade wohl alle beteiligten Kreise einig. Von hier aus ergibt sich ein allgemeiner erfreulicher Aufschwung des physikalischen Betriebs, der aber auf allerlei Schwierigkeiten stößt, die ich hier bezeichnen muß.

*) Conférences du musée pédagogique, Paris 1904: L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques par MM. *H. Poincaré, G. Lippmann, L. Poincaré, P. Langevin, É. Borel, F. Marotte* avec une introduction de M. *L. Liard.*

**) Vergl. auch verschiedene Stellen in *H. Poincaré*, La science et l'hypothèse (deutsch von *F.* und *L. Lindemann* unter dem Titel: Wissenschaft und Hypothese, Leipzig, Teubner, 1904). — Ich verweise gern auch noch allgemein auf den Artikel von *F. Marotte*: Les récentes réformes de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire français" im neuesten Hefte der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinignng (Sept. 1904), sowie eine Reihe anderer französischer Publikationen, die bereits in meiner Schrift: „Über eine zeitgemäße Umgestaltung usw." zitiert sind.

Da ist zunächst die Beschaffung ausreichender Sammlungen und Arbeitsräume, die nicht ohne größere finanzielle Mittel durchgeführt werden kann (soviel im einzelnen durch gemeinsame Beschaffung zweckmäßiger Apparate usw. gespart werden mag). So viel zu sehen, ist die Lage der einzelnen Anstalten in dieser Hinsicht sehr ungleich. An einzelnen, insbesondere städtischen Schulen, ist ganz Hervorragendes geleistet, während die Dinge anderwärts noch sehr im Rückstande sind.

Da ist ferner die steigende Unmöglichkeit, mit der gegebenen Stundenzahl (2 an den Oberklassen der Gymnasien, 3 an den Realanstalten) auszukommen.

Dieselbe resultiert zunächst aus dem immer rascher werdenden Fortschreiten der Wissenschaft selbst. Jedes Jahr bringt neue Entdeckungen nach praktischer wie nach theoretischer Seite, welche zu ignorieren unmöglich ist. Ich nenne nur elektrische Kraftübertragung, Röntgenstrahlen, Radioaktivität. Wollten Sie von diesen Dingen in der Schule schweigen, die Schüler selbst würden mit unbequemen Fragen an Sie herantreten. Und gleichzeitig wächst die Physik immer mehr mit den Nachbarwissenschaften zusammen. In erster Linie mit der Chemie: man wird im physikalischen Unterricht eine gewisse Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Fragen nicht mehr abweisen können. Aber auch psychologische und erkenntnistheoretische Dinge müssen erörtert werden, beispielsweise, wenn von der Farbenwahrnehmung oder überhaupt der Gesichtswahrnehmung im Gegensatz zu der rein physikalischen Theorie des Lichtes gehandelt wird. —

Die in Rede stehende Unmöglichkeit resultiert aber nicht minder aus den Fortschritten der Methodik. Man geht immer mehr darauf aus, die Selbsttätigkeit des Schülers in den Vordergrund zu rücken, in geeigneter Verbindung mit dem sonstigen physikalischen Unterricht physikalische Schülerübungen einzurichten. Wie immer man dieselben organisieren mag, sie verlangen einen beträchtlichen Mehraufwand von Zeit; schreiten doch die Übungen naturgemäß viel langsamer fort als ein systematischer Lehrvortrag*).

Nun hat man ja allerlei Erleichterungen vorgeschlagen, deren jede an ihrem Teile nützlich ist. Einmal Entlastung der physikalischen Lehrstunden durch einen zweckmäßig geleiteten mathematischen Unterricht, worauf schon oben hingewiesen wurde. Dann Beiseitelassung aller minder wichtigen Kapitel der Physik, insbesondere solcher Einzelausführungen, die sich überlebt haben (wie zahlreiche Experimente

*) Vergl. wegen aller dieser Dinge einen Aufsatz von *H. Hahn* im Sonderheft 3 der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Herbst 1904.

der Elektrostatik). Ferner Anreihung des Stoffes an eine auf vorangehende Kenntnis der Mechanik gestützte Energetik*). Endlich neuerdings Einrichtung propädeutischer physikalischer Kurse in den mittleren Klassen, wie sie übrigens in Österreich längst bestehen**).

Inzwischen scheint es, daß alle diese Erleichterungen nicht ausreichen. Jedenfalls rufen die Physiklehrer lebhaft nach mehr Stunden, wie dies andererseits mit dringenden Gründen die Vertreter der übrigen naturwissenschaftlichen Fächer tun. Die Änderungen im mathematischen Unterricht, die ich oben befürwortete, betreffen nur den inneren Betrieb der Mathematik selbst; sie können dementsprechend, sobald man will, ohne weiteres durchgeführt werden. Physik und die anderen Naturwissenschaften aber gehen mit ihren Wünschen wesentlich weiter, sie treten entweder miteinander oder mit anderen Unterrichtsfächern in Kollision. Es wird die schwierige Aufgabe Ihrer Kommission sein, hier einen gangbaren Ausweg zu finden. Schon hier aber bitten wir die Schulbehörden, diesen Fragen alle Aufmerksamkeit zuzuwenden. Was den Unterricht in Physik und Chemie angeht, so scheint kein Zweifel zu sein, daß das Ausland die deutschen Schulen vielfach überflügelt hat[0]). Und zwar wird die große Sorgfalt, die beispielsweise in England und Amerika dem physikalischen und chemischen (wie auch dem mathematischen) Unterrichte neuerdings zugewandt wird, ausdrücklich damit begründet, daß man hofft, solcherweise die Bevölkerung für den Konkurrenzkampf der Nationen auf dem Gebiete der Industrie und der militärischen Geltung tüchtiger zu machen! Fürwahr ein wichtiger Grund, vielleicht mehr geeignet, unseren Wünschen bei den maßgebenden Instanzen Gehör zu verschaffen, als alle die idealen Überlegungen, mit denen wir sonst operieren.

Im übrigen aber sei hier generell auf *Poske*s Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht aufmerksam gemacht, in der alle hier interessierenden Fragen nun schon lange Jahre hindurch eine ebenso vielseitige als von großen Gesichtspunkten geleitete Vertretung gefunden haben. Vielleicht wäre es gut, wenn die Fachgenossen an der Universität und der technischen Hochschule den dort hervortretenden Bestrebungen unserer Oberlehrerkreise eine er-

*) So *O. Behrendsen* in dem neuen Göttinger Ferienkurssammelbande.

**) Der österreichische Lehrplan ist überhaupt durch die Abstufung, welche er für alle Fächer des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts durchzuführen weiß, wie auch durch die eingehenden, sichtlich von fachkundigster Hand herrührenden methodischen Bemerkungen sehr beachtenswert.

[0]) Ich zitiere hier nur den demnächst in der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht erscheinenden Aufsatz von *K. Fischer:* „Der naturwissenschaftliche Unterricht — insbesondere in Physik und Chemie — bei uns und im Auslande". Derselbe enthält zahlreiche interessante Einzelangaben.

höhte Aufmerksamkeit zuwenden wollten. Ich habe den Eindruck, daß in dem Maße, wie diese Bestrebungen an der Schule Boden gewinnen, die für unsere jungen Studenten bestimmte einleitende Vorlesung über Experimentalphysik höher einsetzen könnte, zumal wenn gleichzeitig der mathematische Unterricht an den Schulen eine für das physikalische Studium geeignetere mathematische Vorbildung zur Verfügung stellen wird.

* * *

Die Heranbildung tüchtiger Lehrer — das ist schließlich der Punkt, der bei allen Reformbewegungen, die wir für die höheren Schulen hegen mögen, als der wichtigste allen anderen voransteht. Ich möchte hierüber um so lieber einige Worte sagen, als hier die Stelle ist, wo die Universität zu unmittelbarer Mitwirkung berufen ist und ich dementsprechend aus eigner Erfahrung reden kann. Es gilt eine doppelte Gefahr zu vermeiden. Einmal, daß wir zu hoch greifen und die Ausbildung des späteren Oberlehrers mit derjenigen des Akademikers verwechseln, für den wissenschaftliche Konzentration auf ein einzelnes Problem bis hin zur Erprobung der eigenen produktiven Kraft als Hauptaufgabe erscheint. Dann wieder, nach der anderen Seite, daß wir nach dem Muster der Lehrerseminare ausschließlich eine gleichförmige Ausbildung der Lehramtskandidaten von breitem enzyklopädischem Charakter anstreben. Der richtige Weg, wie ich ihn verstehe, führt in der Mitte zwischen diesen Extremen hindurch. Beim Studium der Lehramtskandidaten — so etwa möchte ich es formulieren — ist so viel Übersicht und Einsicht betreffs aller mit dem Schulunterricht in Verbindung stehender Teile der einzelnen Wissenschaft anzustreben, daß eine brauchbare Grundlage für eine spätere selbständige Berufstätigkeit gewonnen wird. Hierin liegt, daß wir den Umfang des Studiums weder zu eng noch zu weit wählen dürfen.

Jedenfalls kommen wir zu der Schlußfolgerung, daß wir die mathematisch-physikalischen Studien von den biologischen im allgemeinen abtrennen müssen. Denn jedes dieser beiden Gebiete ist jetzt so breit entwickelt und verlangt, wenn es gründlich und umfassend getrieben werden soll, auf der Universität soviel Zeit (nicht nur durch Vorlesungen, sondern namentlich auch durch Übungen, Praktika und eigene Arbeiten), daß es für einen Mann von mittlerer Begabung ganz unmöglich scheint, nach beiden Seiten Genügendes zu leisten. Wir meinen auch, daß beispielsweise ein Kandidat, der mit der Lehrbefähigung in reiner Mathematik und Physik diejenige in angewandter Mathematik verbindet und damit eine gewisse geschlossene Bildung erworben hat, für die Schule wertvoller sein müßte, als ein

anderer, der sich kümmerliche Nebenkenntnisse in den beschreibenden Naturwissenschaften erwarb, dafür aber seine Hauptfächer nur einseitig betrieb. Die Schulverwaltungen neigen ja zunächst zu einer entgegengesetzten Auffassung: sie wünschen sich Kandidaten, welche auf Grund ihrer Zeugnisse von vornherein möglichst vielseitig zu verwenden sind. Ich verstehe die Notwendigkeit, jüngere Lehrkräfte unter Umständen vielseitig zu beschäftigen, aber es ist die Frage, ob hierzu derjenige, der ein gründliches Studium auf engerem Gebiete bewältigt hat, vermöge seiner größeren geistigen Selbständigkeit nicht schließlich geeigneter ist, als ein anderer, der von der Universität nur oberflächliche Kenntnisse mitbrachte. Ich kann an die Schulverwaltungen nur die Bitte richten, von den tatsächlichen Verhältnissen an der Universität immer wieder nähere Kenntnis zu nehmen und die dadurch gegebenen Notwendigkeiten bei der Beurteilung des Kandidaten nach Möglichkeit in Betracht zu ziehen. Mögen Sie dafür die Versicherung entgegennehmen, daß wir wirklich nicht beabsichtigen, aus jedem Lehramtskandidaten einen Forscher zu machen, sondern daß uns die Brauchbarkeit des Mannes für die Schule am Herzen liegt!

Nach anderer Seite ist freilich meine Meinung, daß wir den Unterricht der Lehramtskandidaten an der Universität unter den Gesichtspunkten, die ich gerade hervorhob, noch vielfach werden bessern können. Was Mathematik angeht, so mehren sich neuerdings die hierher gehörigen Aufsätze und Vorträge in erfreulicher Weise*). Physik betreffend kann ich auf den bereits oben genannten Artikel von *E. Bose* im neuen Göttinger Sammelbande verweisen**). Ich habe vor einigen Tagen die entsprechenden ausgezeichneten Einrichtungen gesehen, welche in Berlin, in der alten Urania, unter Leitung von Herrn Geh.-Rat *Vogel* getroffen sind. Jüngere Lehrer finden dort systematische Anleitung zur Anfertigung und Handhabung physikalischer und chemischer Demonstrationsapparate oder auch zur Anlegung biologischer Sammlungen und Herstellung einfacher biologischer Präparate. Vielleicht kann man sagen, daß diese besonderen Einrichtungen überflüssig wären, wenn der Universitätsunterricht der Lehramtskandidaten überall zweckmäßig entwickelt wäre. Was insbesondere

*) Vergl. z. B. den Aufsatz von *P. Stäckel* im Maihefte der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1904 („Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten"); dann Vorträge von *A. Gutzmer* und *P. Stäckel* (siehe Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, Heft 10/12) auf dem letzthin (Aug. 1904) in Heidelberg abgehaltenen Internationalen Mathematiker-Kongresse (dessen „Verhandlungen" bald ausgegeben werden sollen) usw. usw.

**) Über Kurse in physikalischer Handfertigkeit.

die Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik angeht, so möchte ich noch ein Wort über deren Ausbildung an den technischen Hochschulen sagen. So wie die Verhältnisse sich jetzt entwickelt haben, kann ich nur befürworten, an allen technischen Hochschulen dahingehende Einrichtungen zu treffen. Denn die moderne Technik ist ein so wesentlicher Bestandteil unserer heutigen Kultur, daß wir ihr einen unmittelbaren Einfluß auf das heranwachsende Geschlecht der späteren Lehrer gestatten müssen. Aber freilich müßten an der technischen Hochschule für die Lehramtskandidaten eigene Einrichtungen getroffen werden; es genügt nicht, dieselben auf die für die Ingenieure ohnehin gehaltenen Vorlesungen und Übungen zu verweisen. —

Wichtig insbesondere ist aber, daß die wissenschaftliche Ausbildung und Arbeit der Oberlehrer mit der Studentenzeit nicht abgeschlossen sei. Nicht die selbständige wissenschaftliche Forschung (die immer nur das Vorrecht weniger sein wird), wohl aber die wissenschaftliche Verarbeitung der von anderer Seite neu gewonnenen Fortschritte (Verarbeitung für die Zwecke der Schule) sollte ein allgemeines Attribut der Oberlehrertätigkeit sein. Wir begrüßen die Ferienkurse (die immer weitere Verbreitung finden) als ein vorzügliches Mittel, in dieser Hinsicht immer neue Anregungen zu verbreiten. Aber sie sind für sich nicht genügend, sie sind nur wie eine Art Abschlagszahlung. Was wir wünschen, sind regelmäßige Urlaubssemester, welche dem Lehrer Gelegenheit geben sollen, nach Jahren absorbierender Amtstätigkeit immer wieder freie wissenschaftliche Umschau zu halten und durch persönliche Bezugnahme und Einsicht auf Reisen hier und dort von allen Fortschritten, die auf seinem Gebiet Bedeutung haben mögen, wie insbesondere von dem Eingreifen dieses Gebietes in das allgemeine Getriebe der menschlichen Kultur Kenntnis zu nehmen.

* * *

Ich wende mich zum Schluß noch einmal an die Schulbehörden und diejenigen, die hinter ihnen stehen, die Finanzverwaltungen. Alle Fortschritte, die wir im Unterrichtswesen wünschen mögen, insbesondere diejenigen, welche den naturwissenschaftlichen Unterricht betreffen, kosten Geld. Wir verstehen, daß unseren Vorschlägen daher nur nach ernster Prüfung entsprochen werden kann, aber wir bitten, in der Tat in eine solche Prüfung einzutreten. Und noch ein zweites Spezielles mag hier als Wunsch vorgetragen werden. Soviel ich weiß, wird in den einschlägigen Verwaltungskreisen selbst vielfach beklagt, daß namentlich in den mittleren Instanzen so wenige Sachverständige vorhanden sind, die auf Grund ihrer früheren Studien das Gebiet des

mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts von innen heraus beherrschen. Hier bitten wir, je eher je besser, ändernd einzugreifen. Denn wir leiden unter der Empfindung, daß Wünsche von unserer Seite seit Jahren vielfach nur deshalb haben zurückstehen müssen, weil ihnen an der zunächst in Betracht kommenden Stelle nicht die richtige sachgemäße Würdigung zuteil ward.

Im übrigen aber richte ich einen Appell an das große Publikum der Gebildeten. Es genügt nicht, daß wir die Leistungsfähigkeit des Oberlehrers steigern, sondern wir müssen demselben auch die Berufsfreudigkeit wiedergewinnen, von der man sagt, daß dieselbe hin und wieder verloren gegangen sein soll. Hierzu aber können Sie alle beitragen, indem Sie die eigenartigen Schwierigkeiten studieren, die der Unterricht an den höheren Schulen, der wissenschaftlich und pädagogisch zugleich sein soll, mit sich bringt, und daraufhin den Männern, welche der Überwindung dieser Schwierigkeiten ihre Lebensarbeit zuwenden, verständnisvolle Sympathie und Hochachtung entgegenbringen!

Anhang B.

Der Meraner Lehrplan für Mathematik.

Im Text zitiert Seite 6. Abgedruckt aus den Verhandlungen der Naturforscherversammlung **1905**, I, Seite 156—167 (dort unter dem Titel: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten). Außerdem abgedruckt in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **36** (1905), Seite 543—553; sowie in der Sonderausgabe: Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig (Teubner) 1905, Seite 11—21.

Die Mathematik befindet sich an unseren höheren Lehranstalten in wesentlich anderer Lage als die Naturwissenschaften: sie braucht sich die erforderliche Geltung innerhalb des Schulorganismus nicht erst zu erkämpfen, sondern sie bedarf nur einer gewissen Anpassung an die modernen Aufgaben der Schule, und diese wird ihr weniger durch äußere Umstände als durch den Druck der über Jahrhunderte sich erstreckenden Tradition erschwert.

Das Prinzip dieser Anpassung kann dabei nicht fraglich sein; dasselbe tritt u. a. in den methodischen Bemerkungen der preußischen Lehrpläne von 1901 bereits deutlich hervor. Einmal gilt es (wie in allen anderen Fächern), den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen

Denkens. — Die von je dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt, ja, man kann sagen, daß diese Aufgabe durch die stärkere Pflege der genannten Richtung des mathematischen Unterrichts nur gewinnt, insofern dadurch die Mathematik mit dem sonstigen Interessenbereich des Schülers, in dem sich doch seine logische Fähigkeit betätigen soll, in engere Fühlung gebracht wird.

Dies das Prinzip; wir haben unsere Hauptaufgabe darin erblickt, durch einen geeigneten Lehrplanentwurf, der an die Verhältnisse der humanistischen Gymnasien anknüpft, dieses Prinzip von vornherein konsequenter auszugestalten, als bisher geschehen war. Wir meinen damit einen wirklichen, großen Fortschritt angebahnt zu haben, der allen Freunden einer zeitgemäßen Reform und zumal den Vertretern der Naturwissenschaft hochwillkommen sein muß. Hinsichtlich der Einzelheiten verweisen wir auf den unten folgenden Entwurf selbst und die beigefügten Erläuterungen und heben hier vorab nur folgende Punkte besonders hervor:

1. Indem unser Lehrplan den vorhin genannten allgemeinen Gesichtspunkten in wesentlich höherem Maße gerecht wird als der bisherige, dafür aber eine Menge entbehrlichen Stoffs ausscheidet, bedeutet er eine wesentliche Erleichterung für die Mehrzahl der Schüler, nämlich eine Zurückschiebung derjenigen Momente, deren Voranstellung bei zahlreichen Schülern den Erfolg des mathematischen Unterrichts von vornherein unnötig in Frage zu stellen pflegt. In Wegfall kommen insbesondere alle Einzelheiten, deren Beherrschung eine besondere Rutine voraussetzt, sowohl auf dem Gebiete der analytischen Umformungen als der geometrischen Konstruktionen. Andererseits werden die abstrakten Auffassungen und Beweise, die dem Anfänger so oft unverständlich bleiben, auf die höhere Stufe hinaufgeschoben. Auf Sicherheit in der Anwendung der erworbenen mathematischen Kenntnisse und auf Folgerichtigkeit des mathematischen Denkens von Anfang an soll darum keineswegs verzichtet werden. In dieser Hinsicht richtige Forderungen einzuhalten, ohne doch in Übertreibungen zu verfallen, ist die Kunst des Lehrers, deren individuelle Betätigung wir hier, wie auch sonst, nicht durch besondere Vorschriften unnötig einengen wollen.

2. Eine weitgehende Freiheit des Lehrers in bezug auf die Auswahl im einzelnen, auf die methodische Darbietung, die Verteilung der Arbeiten usw. — selbstverständlich im Rahmen des allgemeinen Lehrplans — wollen wir überhaupt nachdrücklichst empfehlen. Wir haben dieser Freiheit in unserem Lehrplan die Entscheidung eines besonders wichtigen Punktes überlassen, hinsichtlich dessen die Meinungen der Fachmänner noch nicht genügend geklärt scheinen. Wir

befürworten in unserem Lehrplan (als eine Folgerung aus unserem allgemeinen Prinzip), daß der mathematische Unterricht in der Prima des Gymnasiums bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung herangeführt werden muß, haben aber nichts Bestimmtes darüber festgesetzt, in welcher Form dieser Abschluß zweckmäßig erreicht werden wird. Sind hierüber erst durch Versuche an verschiedenen Anstalten vielseitigere Erfahrungen gewonnen, so wird sich mit größerer Sicherheit urteilen lassen, wie die Sache am besten gemacht wird.

3. Als abschließendes Ziel des mathematischen Unterrichts auf Oberprima erscheint schließlich ein Dreifaches:

ein wissenschaftlicher Überblick über die Gliederung des auf der Schule behandelten mathematischen Lehrstoffs,

eine gewisse Fähigkeit der mathematischen Auffassung und ihrer Verwertung für die Durchführung von Einzelaufgaben,

endlich und vor allem die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

Hiermit ist in mathematischer Hinsicht nicht nur eine wertvolle, in sich abgerundete Kenntnis gewonnen, sondern zugleich für alle diejenigen, deren besonderer Beruf dies verlangt, die brauchbare Grundlage für Weiteres. Die Diskontinuität, welche sich beim Übergang zu höheren Studien zurzeit vielfach geltend macht, wird wegfallen.

In ähnlicher Weise soll der durch unseren Lehrplan vermittelte Abschluß nach Untersekunda sowohl demjenigen dienlich sein, der die Schule mit dem Einjährig-Freiwilligen-Zeugnis verläßt, wie dem anderen, der auch die oberen Klassen der Anstalt absolviert.

4. In organisatorischer Hinsicht haben wir nur den Wunsch geltend zu machen, daß die Einschnürung des mathematischen Unterrichts auf nur drei Stunden in den Gymnasialtertien, die seinerzeit zugunsten des dort einsetzenden griechischen Unterrichts getroffen wurde und deren ungünstige Wirkung von allen Fachlehrern beklagt wird, wieder rückgängig gemacht werden möchte. Vier Stunden Mathematik (bezw. Rechnen) gleichförmig durch alle Klassen des Gymnasiums hindurch sollte die allgemeine Norm sein.

So viel hier vorab über den mathematischen Lehrplan der Gymnasien. Was die Realgymnasien und die Oberrealschulen angeht, so beschränken wir uns auf mehr allgemeine Bemerkungen. Diese Schulen finden sich unter der Einwirkung der neuen Berech-

tigungen zu sehr im Flusse der Entwicklung, als daß es geraten wäre, jetzt schon alle Einzelheiten festzulegen. Auch scheinen hinsichtlich dieser Schulen in verschiedenen Landesteilen, z. B. im Osten und Westen der preußischen Monarchie, bis auf weiteres noch große innere Verschiedenheiten zu bestehen.

Der Mathematik sind in Preußen an den höheren Realanstalten zurzeit folgende Stundenzahlen zugewiesen:

Mathematik	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Summa
Realgymnasium	4	4	4	5	5	5	5	5	5	42
Oberrealschule	5	5	6	6	5	5	5	5	5	47

Dementsprechend ist auch in den bisherigen Lehrplänen für beiderlei Anstalten ein höheres mathematisches Lehrziel festgesetzt als an den humanistischen Gymnasien.

Man wolle nun beachten, daß für den naturwissenschaftlichen Unterricht (für den an den Gymnasien durch alle Klassen durchlaufend nur zwei Stunden vorgesehen sind) folgende Stundenzahlen angesetzt werden:

Naturwissenschaft	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Summa
Realgymnasium	2	2	2	2	2	4	5	5	5	29
Oberrealschule	2	2	2	2	4	6	6	6	6	36

Dies ist zwar beträchtlich mehr, als an den humanistischen Gymnasien, erscheint aber gegenüber der Bildungsaufgabe, welche die Naturwissenschaften an den Realanstalten zu erfüllen haben, zumal wenn jetzt die biologischen Disziplinen auch in den Oberklassen berücksichtigt werden sollen, noch durchaus als unzureichend.

In Erwägung dieser Verhältnisse beschloß die Kommission auf Anregung ihrer mathematischen Mitglieder, an den Realgymnasien, wo die Verhältnisse für den verstärkten Betrieb der Naturwissenschaften besonders ungünstig liegen, lieber vorläufig auf das Plus der mathematischen Lehrstunden zu verzichten, d. h. von Untertertia beginnend je eine Stunde Mathematik an die Naturwissenschaften abzutreten. Wir würden dann am Realgymnasium durchlaufend durch alle Klassen vier Stunden Mathematik haben, wie wir es normalerweise für das Gymnasium verlangen, und es würde der für die Gymnasien aufgestellte mathematische Lehrplan eo ipso für die Realgymnasien mit zu gelten

haben. Die Naturwissenschaft aber erhielte am Realgymnasium fast ganz dieselben Stundenzahlen, über die sie jetzt an der Oberrealschule verfügt, nämlich:

Naturwissenschaft	VI	V	IV	IIIb	IIIa	IIb	IIa	Ib	Ia	Summa
Realgymnasium	2	2	2	3	3	5	6	6	6	35

Beide Schulen müßten dann gemeinsam daran arbeiten, die ihnen für Naturwissenschaft demgemäß zur Verfügung stehende Zeit durch Konzessionen von seiten anderer Fächer fernerhin zu erweitern. Hierauf wird in dem naturwissenschaftlichen Teile unseres Berichtes noch näher eingegangen werden.

Ein Mehr an Wochenstunden (für den mathematischen Unterricht) würde demnach nur an den Oberrealschulen vorhanden sein. Dieses Mehr soll nach der übereinstimmenden Ansicht der Kommissionsmitglieder vor allem zur vertieften Behandlung desselben Stoffs, der auch auf den Gymnasien verarbeitet wird, benutzt werden, indem einerseits die im Stoff liegenden allgemeinbildenden Momente in größerem Umfange herausgeholt und schärfer betont werden, andererseits den praktischen Anwendungen und der Pflege der zeichnerischen Seite ein breiterer Raum gewährt wird. Eine Minderheit der Kommission wollte sich auf diese Begrenzung der Lehraufgabe für die Oberrealschulen beschränken, die Mehrheit dagegen empfiehlt eine mäßige Weiterführung derselben durch systematische Ausgestaltung des Unterrichts in analytischer Geometrie und den Elementen der Infinitesimalrechnung. Diese Ausgestaltung würde sich durchaus folgerichtig an den vorangehenden Unterrichtsbetrieb anschließen (während das Plus, welches die höheren Realanstalten bisher vor den Gymnasien voraus hatten, mehr zufällig gewählt erscheint). Auch würde der Abschluß des Mathematikunterrichts auf Oberprima der Art nach derselbe bleiben wie bei den Gymnasien, und nur ein vollständigeres mathematisches Verständnis aller in Betracht kommenden Natur- und Lebensvorgänge anstreben. Der Absolvent könnte beispielsweise soweit gefördert sein, daß er die Sätze von den unendlich kleinen Schwingungen eines Pendels oder die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung als Folgerungen aus den Grundsätzen der Mechanik und dem Newtonschen Gravitationsgesetze auf kürzestem Wege befriedigend abzuleiten vermöchte.

Mathematischer Lehrplan für die Gymnasien.

A. Unterstufe.

Sexta.

Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, benannten und unbenannten, im beschränkten Zahlbereich. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen. Übungen in der dezimalen Schreibweise und in den einfachsten dezimalen Rechnungen als Vorbereitung für die Bruchrechnung.

Quinta.

Rechnen. Fortgesetzte Übung im Rechnen mit benannten Dezimalzahlen, unter Erweiterung des Gebietes der zur Verwendung kommenden Maße (auch ausländische Gewichte und Münzen), Längenmessungen verschiedener Art (auch im Gelände); einfachste Aufgaben der Flächen- und Raumberechnung unter Verwertung des Zusammenhanges zwischen Rauminhalt und Gewicht. (Bei allen derartigen Rechnungen ist stets ein Überschlag der Größenordnung des Ergebnisses voranzuschicken). Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche (zunächst als benannte Zahlen).

Propädeutische Raumlehre. Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, jedoch derart, daß der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheint. Raumausdehnungen, Flächen, Linien, Punkte zunächst an der Umgebung erläutert und bestätigt an den verschiedensten Körpern. Ebene Figuren zunächst als Teile der Körperbegrenzung, dann als selbständige Gebilde, an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind. Übung im Gebrauche des Lineals und Zirkels, beständiges Zeichnen und Messen.

Quarta.

Rechnen. Dezimalbruchrechnung. Abgekürztes Rechnen (an einfachsten Beispielen). Regeldetri unter Vermeidung aller Übertreibung schematischer Formen. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, insbesondere einfache Fälle der Prozent-(Zins-, Rabatt-)Rechnung. Vorbereitung des arithmetischen Unterrichts durch Wiederholung geeigneter, früher gelöster Aufgaben unter Verwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen. Deutung vorgelegter Buchstabenausdrücke und Auswertung solcher Ausdrücke durch Einsetzung bestimmter Zahlwerte. Zusammenhang der Kopfrechenregeln mit den Klammerregeln.

Raumlehre. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Beweglichkeit der Figuren; Abhängigkeit der Dreiecksstücke voneinander; Übergangsfälle (rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige, gleichseitige). Einfache Parallelogrammsätze, ausgehend von der Konstruktion der Gebilde.

Untertertia.

Arithmetik. Systematische Zusammenfassung der Grundrechnungsregeln durch Buchstabenformeln. Begriff der relativen Größen, entwickelt an praktischen Beispielen und veranschaulicht durch die beiderseits unendlich ausgedehnte Zahlenlinie. Rechenregeln für relative Größen. Fortsetzung der Übungen in Auswertung von Buchstabenausdrücken unter Heranziehung der negativen Größen und steter Betonung des funktionalen Charakters der auftretenden Größenveränderungen. Anwendung auf reine und eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Unterschied zwischen identischen und Bestimmungsgleichungen.

Raumlehre. Erweiterung der Lehre vom Parallelogramm. Das Trapez. Fundamentale Sätze der Kreislehre. Betrachtung des Einflusses, den die Größen- und Lagenänderung einzelner Stücke auf den Gesamtcharakter der Figur ausübt. Konstruktionen im engen Anschluß an den Lehrgang, unter Ausschluß aller nur durch Kunstgriffe lösbaren Aufgaben.

Obertertia.

Arithmetik. Ergänzung und Erweiterung der Buchstabenrechnung, namentlich Zerlegung von Polynomen. Einfachste Sätze über Proportionen. Reine und eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Abhängigkeit eines Größenausdrucks von einer in ihm auftretenden Variablen. Graphische Darstellung einfacher linearer Funktionen und Benutzung dieser Darstellung zur Auflösung von Gleichungen.

Raumlehre. Flächenvergleichung und Flächenberechnung unter Heranziehung von Gebilden mit verwickelterer geradliniger Begrenzung; Annäherungsberechnung krummlinig begrenzter Flächenstücke. Wiederholung der schon in Quinta vorgekommenen Raumberechnungen. Aufgaben wie in Untertertia.

Untersekunda.

Arithmetik. Potenzen und Wurzeln. Reine und eingekleidete Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Wurzeln. Betrachtung des von einer

Variablen abhängenden quadratischen Ausdrucks in seiner dadurch bedingten Veränderlichkeit unter graphischer Darstellung. Lösung von Aufgaben zweiten Grades mit einer Unbekannten durch Schnitte von Geraden und Parabeln. Betrachtung der graphischen Darstellung als Mittel zur Veranschaulichung empirisch gefundener Zusammenhänge.

Raumlehre. Ähnlichkeitslehre unter besonderer Verwertung der Ähnlichkeitslage. Proportionen am Kreise. Berechnung von Näherungswerten für Kreisumfang und Kreisinhalt durch polygonale Annäherung. Eingehende Verfolgung der gegenseitigen Abhängigkeit von Seitenverhältnissen und Winkelwerten beim Dreieck, besonders bei den rechtwinkligen. Aufstellung und Erprobung von Tabellen für diese Abhängigkeit (als Vorbereitung für die Trigonometrie), im Anschluß daran praktische Aufgaben (Aufnahmen am Meßtisch).

B. Oberstufe.

Obersekunda.

Arithmetik. Erweiterung des Potenzbegriffes, Auffassung der Potenz als Exponentialgröße, Begriff und Anwendung des Logarithmus. Arithmetische Reihen erster Ordnung und geometrische Reihen, Anwendung der letzteren auf Zinseszins- und Rentenrechnung (in einfachsten, der Wirklichkeit entnommenen Aufgaben). Graphische Darstellung der gegenseitigen Abhängigkeit von Numerus und Logarithmus. Rechenstab. Lösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten sowohl durch Rechnung als durch graphische Darstellung.

Raumlehre. Trigonometrie unter Anknüpfung an die konstruktive Planimetrie. Verwendung zu praktischen Aufgaben der Dreiecks- und Vierecksmessung. Charakterisierung der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen der Winkeländerung und der Funktionsänderung durch die Formeln der Goniometrie; graphische Darstellung dieser Abhängigkeit. Behandlung geeigneter Aufgaben auf mehrfachem Wege, konstruktiv und mit Hinzunahme der Rechnung. Eingehen auf die harmonischen Beziehungen und die Grundlagen der neueren Geometrie als Abschluß der Planimetrie.

Unterprima.

Arithmetik. Zusammenhängende Betrachtung der bisher aufgetretenen Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen (unter eventueller Heranziehung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals), mit Benutzung zahlreicher Beispiele aus der Geo-

metrie und der Physik, insbesondere der Mechanik. Einfachste Sätze der Kombinatorik mit einigen Übungsbeispielen.

Raumlehre. Stereometrie unter Berücksichtigung der wichtigsten Elemente der Projektionslehre. Übungen im stereometrischen Zeichnen. Einfachste Sätze der sphärischen Trigonometrie. Mathematische Geographie, einschließlich der Lehre von den Kartenprojektionen.

Oberprima.

1. Kegelschnittslehre sowohl in analytischer als in synthetischer Behandlung, mit Anwendung auf die Elemente der Astronomie.

2. Wiederholungen aus dem Gesamtgebiet des mathematischen Schulunterrichts, womöglich an der Hand größerer Aufgaben, die rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden müssen.

3. Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte.

Erläuterungen zu dem vorstehenden mathematischen Lehrplan für die Gymnasien.

1. Im Rechenunterrichte der unteren Klassen wird der Zahlenkreis, dem die Beispiele zu entnehmen sind, gehörig einzuschränken, Zahlen, die über 100000 hinausgehen, werden zu vermeiden sein. Das Kopfrechnen ist stark zu pflegen. Bei den dem praktischen Verkehrsleben dienenden Maßen, Münzen und Gewichten sind die einheimischen Verhältnisse vorzugsweise zu berücksichtigen, die Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben müssen wirkliche, nicht fingierte, praktisch niemals vorkommende Verhältnisse behandeln. Insofern ist der Rechenunterricht vielfach Sachunterricht, soll aber nicht über das hinausgehen, was wir im allgemeinen von einem gebildeten Erwachsenen verlangen. Andererseits ist der Rechenunterricht als Vorbereitung auf die Arithmetik anzusehen. Die Unterscheidung der Stufen und der Hinweis auf den inneren Zusammenhang ist daher besonders zu beachten. Aus demselben Grunde ist von vornherein Wert auf eine gute und konsequente Bezeichnung zu legen. Dieselbe soll nicht im Widerspruch stehen zu der weiterhin beim mathematischen Unterricht benutzten. Es sollte an jeder Anstalt Sache des führenden Mathematikers oder einer besonderen Fachkonferenz sein, in dieser Hinsicht einen abgleichenden Einfluß auszuüben.

Der geometrische Unterricht soll sich an die natürliche Anschauung anschließen und von praktischen Messungen ausgehen; er wird auf das sorgfältigste vermeiden müssen, Dinge, die dem natürlichen Gefühl als selbstverständlich erscheinen, durch eine pedantische Beweissystematik dem Verständnis zu entfremden, vielmehr alle logischen Beweise zu einem Bewußtwerden der ganz von selbst im Geiste auftretenden Erwägungsmomente zu gestalten suchen, mit dieser Behandlung aber auch erst allmählich einsetzen. So wird z. B. die Kongruenz der Figuren als selbstverständliche Folge der nur ein einziges Ergebnis liefernden praktischen Konstruktion herzuleiten sein. Indirekte Beweise sind möglichst zu vermeiden, die Umkehr direkt bewiesener Beziehungen, soweit sie — wie meistens — dem gesunden Verstand auf der Hand liegt, als selbstverständlich zu behandeln. Bei den Zeichnungen ist die Übersichtlichkeit in jeder Weise, durch Schraffierung, Anwendung von Farben und dergleichen mehr, zu begünstigen, jede Erschwerung durch Nebensachen, unnötig umständliche Bezeichnungen usw. zu vermeiden. Bei den planimetrischen Betrachtungen ist, wo es irgend geht, der Zusammenhang mit den Verhältnissen des dreifach ausgedehnten Raumes lebendig zu erhalten, namentlich auch durch Heranziehung geeigneter Anschauungsbeispiele aus der Wirklichkeit. Auch empfiehlt sich die Benutzung von Modellen.

2a. In den mittleren Klassen tritt an Stelle des Rechenunterrichtes der Unterricht in der Arithmetik, der im letzten Abschnitt des Quartaunterrichtes durch systematische Behandlung des ganzen vorausgehenden Rechenunterrichtes und durch Ausbildung einer gewissen praktischen Vertrautheit mit der Buchstabensprache vorbereitet worden ist. In der Systematik des arithmetischen Unterrichtes ist jede pedantische Beweisführung zu vermeiden, bei der ohnehin vielfach die Gefahr der Beweiserschleichung durch einen Circulus vitiosus vorliegt. Vielmehr sind die Sätze der theoretischen Arithmetik als wissenschaftliche Zusammenfassung dessen zu behandeln, was bereits lebendig im Bewußtsein vorhanden ist. Dementsprechend ist auch die Einführung der negativen Zahlen durch Beispiele aus der Praxis zu bewirken, die Darstellung auf der Zahlenlinie als die anschauliche Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse zu behandeln, sodaß die Rechenregeln mit den relativen Größen als naturgemäße Erweiterung der Operationen an den absoluten Größen allein erscheinen. Alle künstlichen Operationen, Divisionen komplizierter Polynome und dergleichen sind zu vermeiden, dagegen die Zerlegung der Polynome eingehend zu betreiben (Quadratwurzelausziehung als Übungsstoff), bei den Proportionen nur die einfachsten Beziehungen zu berücksichtigen, namentlich aber der Begriff der

direkten und der indirekten Proportionalität zu einem lebendigen Besitz zu machen.

Auf diese Weise bleibt Zeit, den Hauptteil der Arbeit auf die Erziehung zum funktionalen Denken zu verwenden, das bereits durch die propädeutische Behandlung der Arithmetik am Schluß des Quartaunterrichtes insofern vorbereitet ist, als dort die Änderung der algebraischen Ausdrücke, durch Einsetzen verschiedener Werte für die einzelnen in ihnen auftretenden Größen, ganz von selbst sich geltend macht.

2b. Diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet, z. B. bei Gestaltsänderung der Vierecke, Änderung in der gegenseitigen Lage zweier Kreise usw. Zugleich aber bietet die Betrachtung der hierbei auftretenden Beziehungen, die man nach mannigfachen Gesichtspunkten in Reihen ordnen kann, ein vorzügliches Mittel zur Schulung des logischen Denkens, das möglichst auszunützen ist, ebenso die Betrachtung der Übergangsfälle und die Herausarbeitung des Grenzbegriffs. Zugunsten dieser Aufgabe sind mancherlei Einzelheiten aus dem bisherigen Pensum auszuscheiden, manche Dinge überhaupt nur ganz flüchtig zu berühren, insbesondere die Ausdehnung der für rationale Beziehungen erwiesenen Sätze auf den Fall der Irrationalität nur durchaus praktisch zu behandeln, d. h. unter Hinweis auf die Möglichkeit, den bei Ersatz des Irrationalen durch rationale Zahlen zu begehenden Fehler nach Belieben zu verringern.

Die Konstruktionen sind nur in engem Zusammenhang mit dem eigentlichen Lehrgang zu betreiben; bei der sogenannten Analysis ist vor allem auf die Gedankengänge zu achten, durch die man wirklich auf die Lösung kommt, d. h. die Analysis ist sozusagen psychologisch zu betreiben; besonderer Wert ist auf die der Gewohnheit des funktionalen Denkens sehr förderliche Determination zu legen (wobei wieder die Grenzfälle in erster Linie zu diskutieren sind).

Ferner wird auf dieser Stufe eine Verbindung der rechnenden und der konstruktiven Mathematik anzubahnen sein, teils durch die erste Einführung in die graphische Darstellung, teils durch die praktische Erprobung der zwischen Linienverhältnissen und Winkelgrößen bestehenden wechselseitigen Bedingtheit.

3. Hinsichtlich des Unterrichts an den oberen Klassen mögen einige wenige Bemerkungen genügen.

Im mathematischen Unterricht der Obersekunda ist die Erweiterung des Potenzbegriffes unter Einführung der negativen und gebrochenen Exponenten in wesentlich funktionaler Auffassung durchzuführen, wobei sich von selbst Gelegenheit bietet, die arithmetischen

und geometrischen Reihen in innere Verbindung zu setzen. In der Trigonometrie sind alle künstlichen Umformungen beiseite zu lassen, um einerseits für die praktische Verwertung zu wirklichen Messungen, andererseits für die funktionale Auffassung der Grundelemente Raum zu schaffen. Benutzung von Modellen. — Bei dem mit der Trigonometrie durch geeignete Aufgaben in organische Verbindung zu bringenden Abschluß der Planimetrie ist das Verständnis für den Unterschied zwischen Lagenbeziehungen und Maßbeziehungen besonders zu pflegen.

Was die Heranziehung der Fundamentalbegriffe der Infinitesimalanalysis auf Unterprima angeht, so hat die Kommission sie nur als eine „eventuelle" bezeichnet, weil über die Art und Weise, wie sie zu geschehen hat, die Meinungen in Lehrerkreisen noch zu wenig geklärt sind. Die Kommission will die Entscheidung darüber bis auf weiteres dem Fachlehrer der einzelnen Anstalt überlassen. Ganz gewiß kann es sich dabei nur um Behandlung der allereinfachsten Beispiele von Differentiation und Integration handeln. Die Heranziehung von Aufgaben aus der Physik, insbesondere der Mechanik, zielt nicht nur auf die sehr erwünschte Verbindung des mathematischen und physikalischen Denkens ab, sondern ist auch als Entlastung des zeitlich so sehr eingeschränkten physikalischen Unterrichts gedacht.

In der Stereometrie ist die rechnerische Verwendung der Volumformeln zugunsten eines mehr auf die Anschauung zurückgehenden, die wesentlichen Grundbegriffe der darstellenden Geometrie hervorkehrenden Verfahrens möglichst zu beschränken. Auch sind einfache stereometrische Konstruktionsaufgaben, bei denen besonders auf eine gute zeichnerische Behandlung Wert zu legen ist, zu pflegen.

Dabei wird sich unter Umständen auch Gelegenheit finden, früher behandelte Abschnitte der Planimetrie (Ähnlichkeitslehre, harmonische Beziehungen) unter stereometrischer Herleitung ihrer Grundlagen in einem neuen Lichte zu zeigen.

Die Behandlung der Kegelschnitte in Oberprima soll die synthetische und analytische Seite des Gegenstandes möglichst gleichmäßig berücksichtigen. In der synthetischen Geometrie ist vieles Zeichnen besonders zu empfehlen, damit die Abhängigkeit der Gestalt des Kegelschnitts vom Kegel selbst, wie von der Lage der schneidenden Ebene, andererseits die Abhängigkeit von der Lage der Brennpunkte und Leitlinien deutlich zum Bewußtsein kommt. Die Grenzfälle verdienen auch hier besondere Beachtung.

Die mathematische Erdkunde (auf Unterprima) und die Elemente der Astronomie (auf Oberprima) schließen sich an die entsprechenden Teile des physikalischen Unterrichts an.

In der Reifeprüfung wird sich die mathematische Ausbildung des Schülers und ihr Einfluß auf seine Ausbildung überhaupt am klarsten erkennen lassen, wenn von der jetzigen Forderung der Lösung von vier speziellen Aufgaben abgegangen wird und statt dessen einerseits eine zusammenhängende Darstellung eines allgemeinen Themas, andererseits die vollständige (rechnerische und zeichnerische) Behandlung einer Aufgabe verlangt wird. Ebenso dürfte bei der mündlichen Prüfung mehr Gewicht auf das Verständnis als auf das Auswendigwissen vieler spezieller Formeln zu legen sein.

Anhang C.

Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts*).

Im Text zitiert Seite 65, 114, 158. Abgedruckt aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **14** (1905), Seite 477—492. Einige geringfügige Änderungen, bzw. Zusätze sind in eckige Klammern [ ] geschlossen.

Die folgenden Auseinandersetzungen knüpfen an die Vorschläge betreffend den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht unserer neunklassigen höheren Schulen an, welche die von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte niedergesetzte Unterrichtskommission letzthin in Meran der Öffentlichkeit unterbreitet hat; ich nehme an, daß jedem Leser der nachstehenden Zeilen der von Herrn *Gutzmer* namens der Kommission herausgegebene „Bericht“**) zugänglich sei. Die in Rede stehenden Vorschläge bringen an sich nichts unvermittelt Neues, sondern sind mehr die Konsequenz der stetigen Entwicklung, die unter der Einwirkung der modernen Kulturfaktoren seit lange in Schulkreisen eingesetzt hat. Trotzdem scheinen dieselben in Hochschulkreisen vielfach wie eine Überraschung zu wirken. Man empfindet, daß die Konsequenz und die Voraussetzung der vorgeschlagenen Maßnahmen eine mannigfache Veränderung des Unterrichtsbetriebes auch an den Hochschulen sein muß. In der Tat wird die Kommission nicht umhin können, sich im nächsten Jahre (in ihrem abschließenden Berichte, der den „allgemeinen Problemen“ gewidmet ist) über die hier in Betracht kommenden Fragen zusammenfassend zu äußern⁰). Dabei ist ihr klar, daß alle Vorschläge, die sie formulieren wird, nur ein Schlag ins Wasser sein werden, wenn sie nicht vielseitiger Unterstützung aus Hochschulkreisen selbst von vornherein sicher sein kann; auch können solche Vorschläge wohl

*) Wo das Wort „Hochschule“ wie in der Überschrift fernerhin ohne besonderen Zusatz gebraucht wird, soll damit sowohl Universität, als technische Hochschule usw. usw. gleichzeitig gemeint sein.

**) [zitiert Seite 6].

⁰) [Das wird erst in dem Bericht geschehen, den die Unterrichtskommission auf der diesjährigen Naturforscherversammlung zu Dresden (1907) vorzulegen gedenkt.]

erst nach allseitiger Diskussion in bestimmte Fassung gebracht werden. Die Kommission hat daher zwei ihrer Mitglieder, welche als Hochschullehrer an der Durchführung der bezeichneten Aufgabe in erster Linie interessiert sind, nämlich Herrn Prof. *Chun* (Leipzig) und mich beauftragt, Vorschläge der in Betracht kommenden Art zunächst in vorläufiger Form den beteiligten Hochschulkreisen vorzulegen und letztere damit zu vorgängiger Erwägung der Vorschläge und möglichst öffentlicher Diskussion derselben zu veranlassen. Herr Prof. *Chun* wird dabei insonderheit die Fragen des biologischen Unterrichts behandeln*), während ich mich auf Betrachtung des mathematischen und physikalischen Unterrichts beschränke. Besondere Erörterungen über den chemischen Unterricht bleiben vorbehalten*).

Vielleicht darf ich noch vorausschicken, daß ich auch jetzt schon Gelegenheit genommen habe, mit zahlreichen Kollegen über die in Betracht kommenden Punkte in Gedankenaustausch zu treten. Zweierlei Bedenken, die ich dabei dem Meraner Berichte gegenüber wiederholt formulieren hörte, mögen gleich hier genannt sein. Wie sollen wir, wenn die Abiturienten je nach der Anstalt, die sie durchliefen, so heterogene und zum Teil so weitgehende Kenntnisse mitbringen, unsere Anfangsvorlesungen einrichten? Und wie sollen wir die Lehrer gewinnen, die später (an den neunklassigen Anstalten) einen so spezifizierten Unterricht zu geben vermögen? — Diese beiden Fragen, decken sich so ziemlich mit den beiden Hauptproblemen, die ich im folgenden zu behandeln habe und denen ich je einen besonderen Abschnitt (I und II) meiner Darlegungen widmen werde. Ich werde in I von den mathematischen bzw. physikalischen Vorlesungen für solche Studierende handeln, welche Mathematik oder Physik nur als Hilfswissenschaft gebrauchen, sodann in II von der zweckmäßigen Ausbildung der Lehramtskandidaten für Mathematik und Physik. Der Zweck des unter III angefügten Anhangs ist im Schlußsatz des Abschnittes II angegeben.

I. Mathematik und Physik als Hilfswissenschaften.

Um mich nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, möchte ich meine Bemerkungen gleich an die beiden Hauptvorlesungen anknüpfen, die hier in Betracht kommen: die Vorlesung über Experimentalphysik (die Universitäten und technischen Hochschulen gemeinsam ist) und die einleitende Vorlesung über höhere Mathematik (wie sie an den technischen Hochschulen für die angehenden Ingenieure gehalten zu werden pflegt); — für andere einleitende Vorlesungen wird dem Sinne nach dasselbe gelten.

*) [Die hier angekündigten Aufsätze sind inzwischen erschienen, zitiert Seite 114.]

Beiderlei Vorlesungen machen seither keinen Unterschied hinsichtlich der Vorbildung ihrer Teilnehmer. Sie basieren vielmehr auf der Annahme, daß nur vorausgesetzt werden darf, was der Abiturient vom humanistischen Gymnasium mitbringt. Ja, in der Vorlesung über Experimentalphysik pflegt man vielfach von den mathematischen Vorkenntnissen, die auf den Oberklassen des Gymnasiums erworben werden, auch noch zu abstrahieren.

Ich knüpfe zunächst an den letzteren Umstand an. In ihm kommt in charakteristischer Weise hervor, daß die Homogeneität der Vorbildung, mit der man bei den Hochschulvorlesungen so gern theoretisch operiert, schon jetzt keineswegs vorhanden ist. Neben solchen, welche die volle Maturität einer neunklassigen höheren Schule besitzen, finden sich andere Zuhörer, die zum Teil nur das Abgangszeugnis von Untersekunda haben*). Je eifriger der Dozent darauf ausgeht, seine Zuhörer wirklich zu fördern, um so mehr sieht er sich veranlaßt, sich hinsichtlich der Voraussetzungen an die am mindesten Vorgebildeten anzupassen. Andererseits aber erfreuen sich jetzt schon zahlreiche Gymnasien und zumal Realgymnasien und Oberrealschulen eines theoretisch und experimentell gleich ausgezeichneten physikalischen Unterrichts, der hinsichtlich der Ziele dem wenig nachgibt, was die Hochschulvorlesung anstrebt, und hinsichtlich der Ausführung alle Vorteile des geschlossenen Schulbetriebs, insbesondere des parallel laufenden Mathematikunterrichts, voraus hat. Die Absolventen solcher Anstalten gehen also bei der zurzeit üblichen Anfangsvorlesung an der Hochschule vielfach leer aus.

Für diejenigen Leser, welche den mathematisch-physikalischen Studien fernerstehen, sei hier eingeschaltet, daß die Anpassung des Vorlesungsniveaus an die Vorbildung der Zuhörer in unseren Fächern in der Tat eine Notwendigkeit ist. Bei literarischen oder historischen Vorlesungen scheint dies anders zu sein, bei ihnen wird auch der minder kenntnisreiche Zuhörer aus einer höher gegriffenen Vorlesung Anregung und Förderung die Fülle davontragen, und private Studien mögen dann ausreichen, um die Lücken zu ergänzen. In der

*) Ich bin gebeten, hier folgendes einzuschalten: An den preußischen technischen Hochschulen wurden Personen, die die Primareife hatten, seither als Studierende zugelassen. Durch Allerhöchsten Erlaß vom 5. Juli 1905 aber ist verordnet worden, daß von jetzt ab als Studierende an den technischen Hochschulen nur solche Reichsinländer aufgenommen werden dürfen, die sich im Besitz eines Reifezeugnisses eines deutschen Gymnasiums, Realgymnasiums oder einer Oberrealschule befinden. Nur diese Studierenden werden künftig zu den Prüfungen zugelassen werden. Personen, welche kein Reifezeugnis haben, können, falls sie die wissenschaftliche Befähigung zum einjährigen Militärdienst nachweisen, als „Hörer“ zugelassen werden. Akademische Zeugnisse werden ihnen nicht erteilt.

Mathematik und Physik aber baut sich die Erkenntnis stufenweise auf, und wer die Spitze erreichen will, muß die Stufen der Reihe nach erklimmen. Die Ungleichheit in der Vorbildung unserer Zuhörer bildet für die Anfangsvorlesungen daher einen wirklichen, schweren Mißstand.

Es dürfte an sich zeitgemäß sein, diesen Mißstand einmal klar zur Sprache zu bringen. Im Gedankengang des vorliegenden Aufsatzes aber liegt es, insbesondere zu betonen, daß dieser Mißstand durch die Annahme der Meraner Vorschläge nicht erst geschaffen werden würde, daß er längst besteht und sowieso dringend der Abhilfe bedarf.

Im übrigen: soll die spezifische Entwicklung der neunklassigen höheren Schulen deshalb hintangehalten werden, weil sie unbequeme Änderungen im Betrieb der Hochschulen bedingt? Ich betone hier das Wort „spezifisch". Die preußische Schulreform von 1900 hat aus guten Gründen mit dem Ideal der Einheitsschule gebrochen. Die Einheitsschule führt entweder zur allgemeinen Nichtberücksichtigung wichtiger Kulturelemente und also zu einer bedauernswerten Vereinseitigung oder zur enzyklopädischen Verflachung. Jede Art spezifischer Schulen ist an sich allerdings erst recht einseitig, aber das Prinzip der Vielseitigkeit wird durch das Nebeneinanderbestehen verschiedenartiger spezifischer Schulen gerettet. Sofern der Schüler diejenige höhere Schule besucht, die seiner Begabung und damit zusammenhängend seinem besonderen Lebensplan entspricht, soll gleichzeitig eine Abkürzung der späteren Fachstudien ermöglicht sein, die aus allgemeinen, sozialen wie individuellen Gründen dringend erwünscht ist. Alles dieses ist so oft gesagt worden, daß eine weitere Ausführung sich hier erübrigt. Nur das werde noch hervorgehoben, daß „spezifische" Bildung im vorliegenden Zusammenhange selbstverständlich nicht Fachbildung im niederen Sinne, sondern Allgemeinbildung an einem spezifischen Stoffe bedeuten soll.

Es bleibt kein Ausweg als der, daß die Hochschulen sich an die spezifische Entwicklung der vorbereitenden Anstalten anbequemen. Ich erinnere gern daran, daß die Universität in den ersten Dezennien des vorigen Jahrhunderts eine ganz ähnliche, nur umfassendere Umformung durchgemacht hat, wie sie jetzt in unseren Fächern verlangt wird. Es war die Periode der festen Organisierung unserer heutigen Gymnasien und der Durchführung des Abiturientenexamens. All der vorbereitende Unterricht, der früher die Hauptaufgabe der philosophischen Fakultät gebildet hatte, glitt damals an die Gymnasien herab; die philosophische Fakultät aber erhielt neue und höhere Ziele. Daß diese Entwicklung für die Geltung der philosophischen Fakultät nach innen und außen hin die segensreichsten Folgen hatte,

bestreitet niemand. Mögen hiernach sich diejenigen beruhigen, welche jetzt, wo neue Änderungen herankommen, davon nichts als eine verderbliche Desorganisation der Hochschulen erwarten.

So einheitlich, wie damals, läßt sich die Sache jetzt freilich nicht machen, weil nun verschiedenartige Vorbereitungsanstalten gleichberechtigt nebeneinander stehen. Es scheint notwendig, daß neben den einleitenden Vorlesungen, welche das jedesmalige Optimum der fachlichen Vorbildung voraussetzen, andere ergänzende Vorlesungen stehen, die von dem niederen Niveau der Vorbildung zu dem höheren überleiten. Also Ergänzungen im Sinne der lateinischen und griechischen Kurse, die jetzt an den Universitäten für Hörer ohne genügende sprachliche Vorbildung eingerichtet werden. Die Freunde der Realschulen haben im Interesse der formalen Gleichberechtigung vielfach auf Beseitigung dieser Kurse hingearbeitet. Ich halte das für ganz falsch. Nicht die Beseitigung, sondern die Verallgemeinerung der Kurse sollte das Ziel sein. — Hierüber hinaus aber befürworte ich noch eine spezifische Ausgestaltung der Anfangsvorlesungen je nach der Studienrichtung der Zuhörer. Es ist etwas Ähnliches wie mit den vorbereitenden Schulen selbst. Die Ausdehnung aller Einzelwissenschaften ist so groß geworden, daß allgemein gehaltene Anfangsvorlesungen je länger je mehr nicht mehr wirksam scheinen, oder eine so große Zeit in Anspruch nehmen, wie sie den Studierenden, die ein bestimmtes Ziel in gegebener Semesterzahl erreichen müssen, nicht zur Verfügung steht. Die Vermittelung der Übersicht aber über den Gesamtumfang der einzelnen Disziplinen mögen für diejenigen, die es angeht, entweder geeignete Publica oder höhere Vorlesungen, die sich an den engen Kreis der Spezialisten wenden, übernehmen.

Was nun insbesondere Experimentalphysik angeht, so vereinfacht sich die Sachlage dadurch, daß die Meraner Vorschläge für alle Arten neunklassiger Schulen in Physik ziemlich das gleiche Lehrziel in Aussicht nehmen. Es verbleiben an Änderungen für die einleitende Vorlesung:

1) Abspaltung eines Vorkursus für diejenigen, die ohne geeignete physikalische Vorbildung die Hochschule beziehen.

2) Verschiedenartige Ausgestaltung der Vorlesung je nach der Studienrichtung der Zuhörer.

Zu 2) bemerke ich erläuternd, daß beispielsweise an der Universität in Wien seit langem eigene einleitende experimentalphysikalische Vorlesungen für Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik gehalten werden, in denen natürlich die mathematische Formulierung in spezifischer Weise hervortritt. Analog denke ich mir die einleitenden Vorlesungen für Mediziner, bzw. Ingenieure in zweck-

mäßiger Weise an die Interessen der Zuhörer angepaßt. Wie weit man hier gehen kann, überhaupt wie die Sache im einzelnen gemacht werden soll, müssen die Fachverständigen entscheiden. Die hier für den Physiker erwachsende Aufgabe ist natürlich eine recht schwierige. Und doch muß diese Leistung meines Erachtens erbracht werden, wenn nicht unter dem Druck der Anforderungen der eigentlichen Fachausbildung, die an den Studierenden der Medizin oder der Ingenieurwissenschaft immer dringender herantreten, eine merkliche Herabminderung des naturwissenschaftlichen Niveaus unserer späteren Ärzte und Ingenieure eintreten soll, indem die einleitenden physikalischen Vorlesungen entweder ungebührlich eingeengt oder auch von Ärzten, bzw. Ingenieuren, also Nicht-Physikern, übernommen werden. Caveant consules!

Ich erwarte ja, daß diese Vorschläge seitens der Fachvertreter mannigfach Widerspruch finden werden und wünsche nichts mehr als eine vielseitige Diskussion. Eins erscheint mir sicher: daß die Physik selbst bei diesen Vorschlägen genau so gewinnt, wie bei der spezifischen Ausgestaltung des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen gemäß den Meraner Vorschlägen. Dabei schöpfe ich als Nicht-Physiker eine gewisse Sicherheit bei Beurteilung der Frage aus der analogen Entwicklung, welche die einleitende Vorlesung über höhere Mathematik an den technischen Hochschulen im letzten Dezennium genommen hat, wovon jetzt eingehender die Rede sein soll.

Die Ausbildung der Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen war vor Jahrzehnten nach dem Muster der französischen Anstalten wesentlich mathematisch gedacht. Die Entwicklung ist dann aber die gewesen, daß hiervon immer mehr ein Stück nach dem anderen abgebrochen wurde und unmittelbare Einführung in die Auffassungen der technischen Praxis an die Stelle trat. Die „höhere Mathematik“, d. h. Differential- und Integralrechnung nebst analytischer Geometrie, hält sich jetzt auf einen bloß einleitenden Kurs beschränkt, der in den 2 oder 3 ersten Semestern absolviert wird. Daneben hält sich mit einer gewissen Ausführlichkeit noch die darstellende Geometrie älteren Stiles. Aber schon in der Vorlesung über technische Mechanik, die früher durchaus mathematischen Charakter hatte, drängt sich das Experiment an der ausgeführten Maschine (oder dem ausgeführten Bauwerk) als maßgebender Faktor immer mehr in den Vordergrund. Ich verweise auf die großartigen Ingenieurlaboratorien, welche in den letzten 10 Jahren an allen deutschen technischen Hochschulen eingerichtet worden sind.

Diese Entwicklung, welche vielleicht noch nicht abgeschlossen ist, ist im ganzen genommen jedenfalls eine Notwendigkeit gewesen.

Sie entspricht dem heutigen Bedürfnisse der deutschen Industrie, welche eine große Zahl schaffender Ingenieure und nur eine Minderzahl von Theoretikern verlangt. Sie entspricht dem Sinne der Zeit, die sich aus guten Gründen durchweg von einer bloß formalistischen Bildung abwendet.

Aber die Sache hat ihre Kehrseite. Man hat, wie es scheint, vielfach das Kind mit dem Bade ausgeschüttet: in zahlreichen Fällen der Praxis, in denen allein mathematische Bildung die genügende Antwort zu geben vermag, versagen jetzt die mathematischen Vorkenntnisse unserer Ingenieure. Ich könnte in dieser Hinsicht merkwürdige Einzelheiten mitteilen. Wie finden wir den richtigen Mittelweg?

Hier greifen nun ersichtlich die Meraner Vorschläge in glücklicher Weise ein. Indem der mathematische Unterricht auch an den Gymnasien von vornherein Raumanschauung und funktionales Denken pflegt und in konsequentem Lehrgange bis an die Schwelle der Differential- und Integralrechnung heranführt, wird die einleitende Vorlesung über höhere Mathematik ertragreicher gestaltet werden können als bisher. Insbesondere auch wird sich, nachdem schon auf der Schule die Verbindung zwischen der mathematischen Theorie und den Anwendungen systematisch geübt wurde, die so sehr erwünschte Bezugnahme mit der technischen Praxis zwangloser herstellen lassen. Die Mathematik wird sich in den Gedankenkreis des heranwachsenden Ingenieurs sehr viel mehr organisch einfügen und darum in demselben auch besser haften, als seitlang der Fall war.

Voraussetzung dabei ist natürlich — alles in Übereinstimmung mit den vorausgeschickten allgemeinen Betrachtungen —, daß für diejenigen, welche die Hochschule ohne die normale (in den Meraner Vorschlägen festgelegte) mathematische Vorbildung beziehen, ausreichende Vorkurse eingerichtet werden.

Andererseits bietet sich eine direkte Erleichterung für die Absolventen der Oberrealschulen, — sofern an diesen, wie es die Mehrheit der Kommission befürwortet, der Unterricht noch ein Stück weit in die Infinitesimalrechnung hinein geführt wird. Die Oberrealschüler würden einen Teil der einleitenden Vorlesung an der Hochschule überspringen und dementsprechend früher in die eigentlichen technischen Studien eintreten können. Natürlich würden die einleitenden Vorlesungen dementsprechend gegliedert werden müssen. Daß dies möglich ist und wie es geschehen kann, zeigt das Beispiel der technischen Hochschule in Stuttgart, an der die Dinge seit lange im Sinne dieses Vorschlags geordnet sind, — auch ist nie geklagt worden, daß unter dem Einflusse dieser

Ordnung das mittlere Niveau der mathematischen Ausbildung der Ingenieure dort zurückgegangen sei.

So viel über die in Rede stehende einleitende Vorlesung. Ich verzichte darauf, von der entsprechenden Bedeutung zu reden, welche die Meraner Vorschläge für den Hochschulunterricht in darstellender Geometrie und technischer Mechanik besitzen dürften.*) Im Zusammenhange mit dem zweiten Teile dieser Darlegungen aber muß ich noch eine weitergehende Forderung aufstellen (welche in ganz entsprechender Weise für das Studium der Physik gelten soll). Dies ist, daß an den Technischen Hochschulen (sowohl nach mathematischer als nach physikalischer Seite hin) für diejenigen, welche eine weitergehende Ausbildung wünschen, höhere Vorlesungen („Spezialvorlesungen") in sehr viel größerem Umfange eingerichtet werden als bisher, — Vorlesungen natürlich nicht von abstraktem Charakter, sondern solche, in denen sich die volle theoretische Beherrschung des Stoffes mit dem technischen Verständnis durchdringt. Es würde hier zu weit führen, auch nur an Beispielen zu zeigen, wie sehr diese Forderung im Interesse der immer zu steigernden Leistungsfähigkeit unserer Industrie an sich gerechtfertigt ist; ich bemerke nur, daß der Verein Deutscher Ingenieure diese Forderung bereits 1895 in seine sogenannten Aachener Beschlüsse nachdrücklich mit aufgenommen hat. Der Gesichtspunkt, unter dem ich dieselbe hier zu vertreten habe, ist, daß es der technischen Hochschule ohne solche weitergehende Vorlesungen nicht möglich sein wird, an der Heranbildung jüngerer Lehrkräfte in dem sogleich noch näher zu bezeichnenden wünschenswerten Umfange teilzunehmen.

Im Zusammenhange hiermit will ich mich noch kurz über eine Frage verbreiten, auf die ich schon oben (unter „Experimentalphysik") beiläufig hinwies. Weil Mathematiker bzw. Physiker erfahrungsgemäß nicht immer geeignet sind, die praktische Bedeutung der Theorie hervorzukehren, so kommt auf technischer und wohl auch auf medizinischer Seite immer wieder die Tendenz hervor, nicht Theoretiker, sondern Praktiker mit den einschlägigen Vorlesungen zu betrauen. Man gerät so von der Scylla in die Charybdis: die technische Kenntnis ist da, aber es fehlt zu leicht die theoretische Durchbildung, die sich auch erfahrungsgemäß nachträglich nur sehr

*) Was darstellende Geometrie betrifft, so sei beispielsweise auf die anregende Schrift von *Fr. Schilling* verwiesen: Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie [zitiert Seite 5 des vorliegenden Buches]. — Eine umfassende Darlegung der Gesichtspunkte, die für den Unterricht in der technischen Mechanik neuerdings maßgeblich geworden sind, scheint noch zu fehlen; ich möchte den lebhaften Wunsch aussprechen, daß eine solche demnächst von beteiligter Seite gegeben wird.

schwer erwerben läßt. Systematisch werden wir für den erforderlichen Nachwuchs geeigneter Lehrkräfte nach meinem Dafürhalten nur so sorgen können, daß wir Studierende der Mathematik und Physik möglichst frühzeitig in Fühlung mit den praktischen Problemen setzen. Mit der systematischen Vorbildung allein ist es freilich nicht getan. Vielmehr frage man in jedem Falle einer Berufung auch in Zukunft nicht nach einseitiger Qualifikation, sondern nach der erforderlichen typischen Veranlagung sowohl in pädagogischer als in wissenschaftlicher Hinsicht.

II. Von der Ausbildung der Lehramtskandidaten für Mathematik und Physik.

Der Diskussion sollen hier nur die norddeutschen Verhältnisse zugrunde gelegt werden (mit denen sich die entsprechenden süddeutschen nur schwer vergleichen lassen). Außerdem werde ich in erster Linie immer auf die mathematische Ausbildung der Kandidaten exemplifizieren, nicht nur, weil diese mir näher liegt als die physikalische, sondern weil auch bei ihr die Schwierigkeiten der Sache charakteristischer hervortreten.

Zunächst ein paar Worte über die historische Entwickelung.

Eine besondere Ausbildung von Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften existiert an unseren Universitäten bekanntlich erst seit etwa 75 Jahren*). Die Höhe der Anforderungen war zunächst sehr gering, der Umfang relativ bedeutend (selbstverständlich die sämtlichen naturwissenschaftlichen Disziplinen mit umfassend). Die hohe Wissenschaft als solche hatte mit der Praxis des Lehramtsexamens wenig zu tun; jedenfalls in der Mathematik. Ich berufe mich darauf, daß beispielsweise *Gauß, Dirichlet, Riemann* niemals Mitglieder der Prüfungskommission gewesen sind, ebensowenig *Jacobi, Kummer, Weierstraß, Kronecker.*

Dann erfolgt um die Mitte der 60er Jahre die Wendung zum Intensiven. Je länger je mehr treten die leitenden Mathematiker in die Prüfungskommissionen ein, und die Prüfungsordnung von 1866 verlangt vom Kandidaten in nicht mißzuverstehender Weise: „daß er in die höhere Geometrie, die höhere Analysis und analytische Mechanik so weit eingedrungen sei, um auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen zu können“. Die Steigerung der wissenschaftlichen Leistung, welche solcherweise erreicht wurde, war

---

*) Vergl. überall meinen Aufsatz: Hundert Jahre mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen Preußens [zitiert Seite 29 des vorliegenden Buches].

der Natur der Sache nach von einer Verengerung des Studienkreises auf dem Gebiete der Mathematik selbst begleitet. Zunächst verfiel die angewandte Mathematik, die zum mindesten in der Form astronomischer und geodätischer Studien bei der Ausbildung der Lehramtskandidaten bis dahin eine breite Geltung besessen hatte. Innerhalb der reinen Mathematik aber bildete sich die Konzentration des Interesses auf das eine oder andere von dem jeweiligen Fachmann bevorzugte Spezialgebiet heraus (neuere Geometrie, Invariantentheorie, Funktionentheorie, insbesondere elliptische Funktionen und lineare Differentialgleichungen, usw. usw.). Die Universitäts-Seminare, welche zu Anfang ausdrücklich für die Ausbildung geeigneter Lehrer gegründet waren, verwandelten sich immer ausschließlicher in Stätten für die Heranbildung wissenschaftlicher Forscher.

Der gesamten Entwicklung liegt — bewußt oder unbewußt — die Auffassung zugrunde, daß die Bedeutung der mathematischen Universitätsstudien für den Lehramtskandidaten ausschließlich in deren formal bildender Kraft zu suchen sei. Nicht auf den Gegenstand der mathematischen Studien kommt es dieser Theorie nach an, sondern nur auf die Konzentration und die Anstrengung, die auf ihn verwendet werden. Die Erfahrungen, die man mit den so ausgebildeten Kandidaten an den Schulen machte, sind aber keineswegs allgemein günstig gewesen. Wir sehen denn auch bald Tendenzen wieder auftreten, welche auf größere Vielseitigkeit der mathematischen Ausbildung und auf unmittelbare Berücksichtigung der Bedürfnisse der Schule im Universitätsunterrichte hinzielen. Wenn heute den Kandidaten an zahlreichen Universitäten Lese- und Arbeitsräume mit umfassender Bibliothek zur Verfügung gestellt sind, wenn wir darstellende Geometrie und andere Zweige der angewandten Mathematik unterrichten, so ist dies alles aus dem Wunsche entstanden, den mathematischen Unterricht der Lehramtskandidaten unter Festhalten seines wissenschaftlichen Charakters für die Schule fruchtbringender zu gestalten. Eine ausführlichere Darlegung erscheint überflüssig, da diese Dinge in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten ausführlich behandelt sind*). Ich bitte aber meine Fachgenossen, sich darüber äußern zu

*) Ich will hier nur auf die neuesten einschlägigen Aufsätze in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung verweisen. Es sind dies: *Stäckel*, Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten (Bd. 13, 1904, Seite 313—341), *Gutzmer*, Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten (ebenda, Seite 517—523), *Holzmüller*, Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik (Bd. 14, 1905, Seite 249—274). Es wäre gewiß sehr schön, wenn man eine gewisse Kenntnis der angewandten Mathematik für alle Mathematiker obligatorisch machen könnte. Die angewandte Mathematik

wollen, ob die in Betracht kommenden Gedanken überall in zweckmäßiger Weise durchgeführt sind, ob sozusagen ein Normalbetrieb erreicht ist, der im Interesse der späteren Berufstüchtigkeit unserer Kandidaten wirklich als zweckmäßig bezeichnet werden kann?

Nehmen wir an, ein solcher Normalbetrieb liege wirklich vor, so bin ich mit anderen Fachgenossen der Meinung, daß noch ein Weiteres hinzukommen muß*). Man hat das herrschende System der mathematischen Ausbildung unserer Lehramtskandidaten gelegentlich als ein System des doppelten Vergessens bezeichnet. Auf der Universität beginne man damit, die Mathematik der Schule beiseite zu schieben, um nach bestandenem Lehramtsexamen mit den inzwischen erworbenen höheren Kenntnissen sofort entsprechend zu verfahren! Demgegenüber verlangen wir für unsere Lehramtskandidaten eigene Vorlesungen, welche die notwendige und allseitige Verbindung der höheren Mathematik mit dem Lehrgebiet der Schule herstellen, — Vorlesungen, vermöge deren die höheren Studien der Universitätszeit in der späteren Praxis der Schule dauernd nachwirken sollen. Mit diesen Vorlesungen wird man dann gern pädagogische Ausführungen über Wesen und Aufgabe des mathematischen Unterrichts auf allen seinen Stufen verbinden. Die Einweisung der Lehramtskandidaten in den eigentlichen Schulbetrieb überlassen wir in Preußen den praktischen Seminaren, welche zu diesem Zwecke vor etwa 15 Jahren an den höheren Schulen selbst begründet wurden. Aber das schließt nicht aus, daß wir uns in den Universitätsvorlesungen über die allgemeinen Fragen der mathematischen Pädagogik verbreiten, die in den üblichen pädagogischen Vorlesungen unserer philo-

---

sollte sich nicht als etwas Besonderes, Fremdartiges neben die reine Mathematik stellen, sondern einen selbstverständlichen Bestandteil der normalen mathematischen Bildung ausmachen. Darum erscheinen mir auch solche Anfangsvorlesungen für den Lehramtskandidaten besonders nützlich, in denen sich die Interessen der reinen Mathematik von vornherein mit denjenigen der angewandten Mathematik durchdringen. Mein Kollege *Runge* hat in diesem Sinne im letzten Sommersemester Differential- und Integralrechnung mit großem Erfolg gelesen (3 Stunden Vortrag nebst 3 Stunden Übungen); die Vorlesung soll im gleichen Sinne im kommenden Winter noch fortgesetzt werden.

*) Siehe z. B. *Stäckel* in Bd. 13 der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Seite 524—530: Die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über Elementarmathematik an den Universitäten. — Ich selbst habe Vorlesungen der im Text geforderten Art von Herbst 1904 beginnend in neuer Form abgehalten und hoffe bald näheres darüber veröffentlichen zu können. [Vergl. die vorliegende Publikation.] — Der Vorschlag des Textes schließt natürlich nicht aus, daß bei vielen höheren Vorlesungen zwischendurch Ausblicke auf Naturwissenschaft und moderne Verkehrsverhältnisse, Mitteilungen über die geschichtliche Entwicklung des Gegenstandes, Beispiele wichtiger Einzelfälle gegeben werden, die für die künftige Lehrtätigkeit der Zuhörer nutzbringend sind.

sophischen Kollegen, die zumeist von philologischer Fachvorbildung ausgehen, naturgemäß zu kurz zu kommen pflegen. —

Kandidaten der Mathematik, die auf der Universität eine so umschriebene allseitige mathematische Anleitung gefunden haben, sollten nun in der Tat geeignet sein, allen Anforderungen der in Meran empfohlenen neuen Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts zu entsprechen. Man beachte, daß die Beziehung des Hochschulunterrichts zu den Aufgaben der späteren Praxis durch die Meraner Vorschläge ohnehin wesentlich erleichtert wird. In der Tat wird durch sie die große Kluft zwischen Schulmathematik und höherer Mathematik, die seither bestand, beseitigt: in der Schulmathematik sollen fortan dieselben Gedanken vorangestellt und eingeübt werden, die höher hinauf primäre Geltung besitzen. Bisher war eine Vorlesung über Elementarmathematik im Kreis der anderen Universitätsvorlesungen etwas Fremdartiges; jetzt wird es möglich sein, sie organisch an die anderen anzuschließen.

Ganz ähnliche Bemerkungen wie im Falle der Mathematik werden betreffend den Physikunterricht unserer Kandidaten am Platze sein. Wir werden nicht umhin können, gewisse Erweiterungen des üblichen Betriebes zu verlangen (mit denen übrigens an verschiedenen Plätzen bereits der Anfang gemacht ist). Ich meine Berücksichtigung der Anwendungen, soweit dieselben notwendig in den späteren Schulunterricht hineinspielen (siehe den Meraner Bericht), Anleitung zum selbständigen Demonstrationsvortrag, sowie zu praktisch-physikalischen Arbeiten mit Rücksicht auf die spätere Unterrichtstätigkeit und Selbstanfertigung einfacher Apparate, allgemeine Erörterungen über Methode und Organisation des physikalischen Unterrichts. Die Neuforderungen erscheinen geringer oder doch leichter durchzuführen, als im Falle der Mathematik, weil sich der physikalische Unterricht nie so von einer mittleren Linie entfernt hat, wie der mathematische.

Bei alledem tritt ersichtlich eine große Frage auf. Woher die Zeit nehmen, um allen den verschiedenen, sachlich durchaus berechtigten Anforderungen nebeneinander zu genügen? Die Zahl der Dozenten kann vermehrt, unsere Universitätseinrichtungen können erweitert werden. Die Fassungskraft unserer Studenten aber ist eine im Mittel konstante Größe, an deren Betrag wir ersichtlich auf alle Fälle gebunden sind. Eine Verlängerung der Studienzeit ist durchaus undiskutierbar. Jede Neuforderung bedingt also eine Entlastung nach anderer Seite. In Göttingen, wo die Vertretung der mathematischen und physikalischen Fächer eine besonders vielseitige ist, versuchen wir es seit langem mit dem „fakultativen" System. Einheit der Ausbildung verlangen wir nur im Allernotwendigsten und überlassen darüber hinaus dem einzelnen, nach welcher

Seite er die ihm gebotenen ferneren Möglichkeiten benutzen will. An anderen Universitäten wird sich, was dem Durchschnittskandidaten vielleicht zuträglicher ist, ein geschlossener Studienplan durchführen lassen. Im Anschlusse daran wird man für die Prüfungen in Mathematik und Physik als Hauptfach bestimmte Normen aufstellen können. Ausführliche Verständigung aber durch Diskussion hierüber zwischen den Fachvertretern verschiedener Universitäten scheint mir besonders erwünscht.

Vorbedingung hierfür freilich scheint die Stellungnahme zu einer noch dringlicheren Frage. Die Probleme, von denen wir hier handeln, treten naturgemäß genau so bei der Ausbildung der Lehramtskandidaten in den biologischen Fächern und der Chemie auf (zumal die Meraner Vorschläge eine neue, weitgehende Ausgestaltung des biologischen Schulunterrichts in Aussicht nehmen). Sowohl auf mathematisch-physikalischer als auf biologisch-chemischer Seite erscheint eine fachmännische Durchbildung der Kandidaten unerläßlich. Wird es in Zukunft noch möglich sein, eine wenn auch lose Verbindung zwischen den beiderlei Studienrichtungen aufrecht zu erhalten, oder sollen wir auf reinliche Scheidung derselben hinarbeiten?

Ich selbst meine die reinliche Scheidung befürworten zu sollen. Behält der Studierende der Mathematik oder der Biologie über die erforderlichen Fachstudien hinaus noch disponible Energie, so möge er seine wissenschaftliche Bildung in freier Weise ergänzen. Gewisse Forderungen dieser Art ergeben sich ohnehin von selbst. Einige Kenntnis der Chemie (und der Mineralogie) wird jedem Physiker notwendig sein, und eine entsprechende Kenntnis der Physik dem Chemiker. Der Biologe sollte einiges von Hygiene wissen, der Mathematiker von Astronomie. Jedem aber wird ein von seinem Hauptgebiet ausgehendes Studium der Philosophie gut anstehen. Soll es durchaus eine weitere im Lehramtsexamen zu erbringende Lehrbefähigung sein, so empfehle ich außer philosophischer Propädeutik noch besonders Geographie (weil sich diese relativ leicht an mathematisch-naturwissenschaftliche Studien der verschiedensten Art anschließt)*).

Die Schulverwaltungen, welche an die herkömmliche Verbindung Mathematik-Naturwissenschaften gewöhnt sind, werden der so empfohlenen Zweiteilung der Studien allerdings wohl nur sehr ungern

*) Auf solche Weise wird ein Biologe auch am ungeänderten humanistischen Gymnasium volle Beschäftigung finden können (was gegenüber den Meraner Vorschlägen, die eine Durchführung des biologischen Unterrichts in den Oberklassen zunächst nur für die höheren Realanstalten in Aussicht nehmen, andererseits aber die Notwendigkeit voller fachmännischer Ausbildung gerade des biologischen Lehrers betonen, wichtig ist).

zustimmen, und ich vermute, daß auch im Kreise der Fachgenossen (der Mathematiker, wie der Biologen) stellenweise Widerspruch hervortreten wird. Man wird befürworten, daß sich der Mathematiker im allgemeinen, wie bisher, die biologische und chemische Lehrbefähigung für die Unterstufe erwirbt, der Biologe die entsprechende Lehrbefähigung für Mathematik und Physik. Für diesen Fall befürworte ich gegenüber der jetzigen Praxis mit ihren unbefriedigenden Resultaten eine solche, welche die Erwerbung der Unterstufe erleichtert. Die Vertreter der Mathematik, Physik, Chemie . . . bis hin zur Biologie sollten an jeder Universität zusammentreten und über die zu stellenden Forderungen etwas Klares, nicht zu Weitgehendes vereinbaren. So ist es, wie ich erfahre, neuerdings z. B. in Münster geschehen. Sie sollten ferner dafür sorgen, daß geeignete Vorlesungen und Übungen vorhanden sind, welche den Studierenden nicht stärker belasten, als zur Erwerbung des in Betracht kommenden Zieles durchaus erforderlich ist. — Man kann auch daran denken, die Erbringung der jeweiligen Unterstufe mit einem Zwischenexamen für die Kandidaten der Oberstufe zu verbinden. Ich selbst bin der Einführung eines solchen Zwischenexamens immer sympathisch gegenüber gestanden und glaube, daß der wissenschaftliche Charakter der Studien unserer Lehramtskandidaten dadurch wesentlich gewinnen würde.

Ich verzichte darauf, die solcherweise angedeuteten Möglichkeiten hier noch weiter auszuspinnen. Vielmehr ziehe ich vor, nun noch in einem Anhange zwei andere ebenfalls dringliche Fragen zu berühren, nämlich die Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik an den technischen Hochschulen und die Weiterbildung der bereits im Amte befindlichen Lehrer.

III. Anhang.

A. Was die Ausbildung der Lehramtskandidaten an den technischen Hochschulen angeht, so rechnet die preußische Prüfungsordnung bekanntlich bis zu drei an der Hochschule zugebrachte Semester auf das akademische Triennium an. Die Lehramtskandidaten sollen also nicht ganz von der Universität abgelöst werden, andererseits aber auch dem Einfluß der Technik ein breiter Raum gewährt sein. Inzwischen hat der Erfolg gezeigt, daß die Wirkung dieser Bestimmung ziemlich illusorisch ist. Hauptgrund hierfür ist jedenfalls, daß an den preußischen technischen Hochschulen bislang keine besonderen Vorlesungen und Übungen für die Lehramtskandidaten eingerichtet sind, daß die Kandidaten vielmehr gegebenenfalls gezwungen sind, an den allgemeinen für die Ingenieure bestimmten Fachvorlesungen teilzunehmen. Andererseits werden besondere Unterrichtseinrichtungen

in dieser Hinsicht gewiß nur dann gedeihen, wenn mit ihnen die Möglichkeit des vollen Abschlusses der Studien verbunden ist. Ich bin also je länger je mehr dazu gekommen, die Einrichtung voller Ausbildungskurse für die Lehramtskandidaten der Mathematik und Physik an unseren technischen Hochschulen (wie solche an den süddeutschen Anstalten seit lange bestehen und für die norddeutschen Anstalten von den nächstbeteiligten Kreisen seit lange gewünscht werden) auch meinerseits zu befürworten. Hierzu gehört selbstverständlich eine zweckentsprechende Teilnahme der bei der Ausbildung der Lehramtskandidaten tätigen Dozenten der technischen Hochschule auch an dem Lehramtsexamen. Indem ich diesen Vorschlag hiermit zur Diskussion stelle, präzisiere ich ihn durch die folgenden Bemerkungen:

1. Der Zweck der Einrichtung müßte sein, die eigenartige Bedeutung der Technik für unsere moderne Kultur bei der Ausbildung der künftigen Lehrer sehr viel nachdrücklicher zur Geltung zu bringen, als es durch die bloße Einrichtung von Kursen über angewandte Mathematik und Physik an den Universitäten im allgemeinen geschieht.

2. Es würde sich also nicht darum handeln (was hin und wieder befürchtet wird), in die technischen Hochschulen ein fremdartiges Element einzufügen, vielmehr darum, die wissenschaftliche Bedeutung der technischen Hochschulen zu spezifischer Ausprägung zu bringen.

3. In der Tat scheint hier die Möglichkeit gegeben, jene höheren mathematischen und physikalischen Vorlesungen, deren Notwendigkeit wir oben (unter I) aus allgemeinen Gründen befürworteten, dem Programm der technischen Hochschulen in fester Form einzufügen.

4. Zugleich würde eine Aufgabe der Lehrerbildung durchführbar werden, die bisher sehr im argen lag, nämlich die systematische Ausbildung von Fachlehrern für die zahlreichen mittleren technischen Schulen (die näheren Ausführungen über diesen wichtigen Punkt gehören nicht in den gegenwärtigen Aufsatz).

5. Es will auch überlegt sein, daß durch die in Aussicht genommene Entwicklung des mathematisch-physikalischen Unterrichts das Interesse der mathematischen und physikalischen Dozenten an der Unterrichtsaufgabe der technischen Hochschule ein sehr viel weitergehendes und lebendigeres werden wird als vielfach bisher.

6. Und selbst die Universitäten werden von der Einrichtung in höherem Sinne Vorteil haben, insofern einige Konkurrenz auf dem ihnen sonst vorbehaltenen Gebiete der Lehrerbildung ihnen zuträglicher sein wird, als das unbestrittene Monopol.

7. Selbstverständlich aber ist die ganze Maßregel ohne eine entsprechende Vermehrung der mathematisch-physikalischen Dozenten an der technischen Hochschule nicht durchführbar.

B. Änderungen im Unterrichtsbetriebe, wie sie in Meran befürwortet wurden, können, wenn sie überhaupt zur Einführung gelangen sollen, nicht erst warten, bis eine neue Lehrergeneration herangewachsen ist. Vielmehr wird versucht werden müssen, die im Amt befindlichen, insbesondere auch die älteren Lehrer soweit als möglich für die Einführung zu gewinnen.

Der preußischen Unterrichtsverwaltung gebührt besonderer Dank dafür, eine in dieser Hinsicht äußerst wichtige Maßregel in die Wege geleitet zu haben. Wie bereits im Meraner Bericht angedeutet, werden im Auftrage der Unterrichtsverwaltung jetzt schon an verschiedenen Stellen mit dem von der Kommission vorgeschlagenen neuen Betrieb von Mathematik und Physik Versuche gemacht; entsprechende Versuche mit dem von der Kommission befürworteten biologischen Unterricht stehen in Aussicht. Hoffen wir, daß sich solcherweise von einzelnen Zentren aus die Überzeugung nicht nur von der Durchführbarkeit unserer Vorschläge, sondern auch von ihrer Zweckmäßigkeit und Bedeutung in den Schulkreisen verbreite!

Vielseitige Besprechung der erreichten Resultate wie der eingeschlagenen Wege auf Fachversammlungen werden beitragen, den Boden weiter zu ebnen.

An meine Hochschulkollegen aber richte ich die Bitte: sie wollen ihrerseits die einsetzende Bewegung durch zweckmäßige Ausgestaltung der von ihnen abzuhaltenden oder erst neu einzurichtenden Ferienkurse unterstützen.

Die naturwissenschaftlichen Ferienkurse werden bislang vielfach dazu benutzt, den Lehrern einzelne neue Fortschritte der Wissenschaft vorzuführen. Dies ist gewiß außerordentlich wichtig, soweit es durchführbar ist, d. h. so weit es gelingt, ein wirkliches Verständnis zu vermitteln. Aber daneben sollten wir, meine ich, in steigendem Maße bemüht sein, in den Ferienkursen von der Bedeutung zu reden, welche ältere und neuere Teile des Hochschulunterrichts für den Betrieb der Schule besitzen. Eine Vorbedingung hierfür scheint freilich, daß sich die Hochschullehrer mehr als seither üblich über die tatsächlichen Verhältnisse an unseren höheren Schulen auf dem Laufenden halten.

Von vornherein werden wir alle auch dafür sein, daß die kurze Zeit der Ferienkurse, die nur eine flüchtige Anregung geben kann, zu vollen Fortbildungssemestern erweitert werden möchte.

Ich zweifle nicht, daß über alle diese Dinge von manchen Seiten Interessantes gesagt werden könnte, und bitte, mit solchen Äußerungen nicht zurückzuhalten.

Göttingen, Ende September 1905.